UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 8 Abgabetermin: Montag, 19.06.2017

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Sei $E = \{f \in C[0,1];\ \operatorname{supp} f \subset (0,1]\}$ versehen mit der Supremumsnorm auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass E bornologisch, aber nicht tonneliert ist.

(*Hinweis: Die Menge* $\{f \in E;\ |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}^*\} \subset E$ *ist eine Tonne.*)

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei E ein bornologischer oder tonnelierter lokalkonvexer topologischer Vektorräume und $M \subset E'$ eine Menge stetiger Linearformen auf E, so dass gilt:

$$\text{Ist } B \subset E \text{ beschränkt, so ist auch } \{f(x);\ f \in M,\ x \in B\} \subset k \text{ beschränkt.}$$

Zeigen Sie: Die Menge M ist gleichstetig.

(*Hinweis: Benutzen Sie im bornologischen Fall, dass jede beschränkte Halbnorm auf einem bornologischen Raum stetig ist.*)

Aufgabe 32 (2+2=4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume. Wir schreiben $L_s(E,F)$ für den Raum $L(E,F)$ versehen mit der durch das Halbnormensytem

$$\|T\|_{x,p} = p(Tx) \quad (x \in E,\ p \text{ stetige Halbnorm auf } F)$$

erzeugten Topologie und $L_b(E,F)$ für $L(E,F)$ versehen mit der durch das Halbnormensytem

$$\|T\|_{B,p} = \sup_{x \in B} p(Tx) \quad (B \subset E \text{ beschränkt},\ p \text{ stetige Halbnorm auf } F)$$

erzeugten Topologie. Sei F vollständig. Zeigen Sie:

(a) E tonneliert $\Rightarrow$ $L_s(E,F)$ folgenvollständig.

(b) E bornologisch $\Rightarrow$ $L_b(E,F)$ vollständig.

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie lokalkonvexer topologischer Vektorräume. Zeigen Sie:

$$\left(\prod_{i \in I} E_i\right)' \cong \bigoplus_{i \in I} E_i'$$

als Vektorräume.
