UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 9 Abgabetermin: Montag, 26.06.2017

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Eine lineare Abbildung $T : E \to E$ heißt *konjugierbar*, falls eine lineare Abbildung $T' : F \to F$ existiert mit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle \quad (x \in E,\ y \in F).$$

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $T : E \to E$ genau dann konjugierbar ist, wenn sie schwach stetig ist, das heißt $T : (E, \sigma(E, F)) \to (E, \sigma(E, F))$ stetig ist.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem und $F_0 \subsetneq F$ ein echter linearer Teilraum von F, der punktetrennend für E ist, das heißt zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ existiert ein $u \in F_0$ mit $\langle x, u\rangle \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\sigma(E, F_0)$ echt gröber ist als $\sigma(E, F)$.

Aufgabe 36 (1+3=4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume und $T : E \to F$ eine stetig lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $T : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ ist stetig.

(b) Die Abbildung

$$T' : F' \to E',\ T'(u) = u \circ T$$

ist stetig linear, wenn man F' und E' jeweils beide mit der schwachen Topologie (Mackey-Topologie, starken Topologie) in den Dualsytemen $\langle F, F'\rangle$ und $\langle E, E'\rangle$ versieht.

(bitte wenden)

Aufgabe 37 **(1+3+2=6 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $p \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^N$ mit $|\alpha| \leq p$. Zeigen Sie:

(a) Der Operator

$$L : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha D^\alpha f$$

und der entsprechende Operator $L : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ sind linear und stetig.

(*Hinweis: Aufgabe 20.*)

(b) Es gibt einen eindeutig bestimmten stetig linearen Operator $L^* : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f L^*(\varphi) dx = \int_\Omega L(f) \varphi dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ f \in C^\infty(\Omega)).$$

(*Hinweis: Aufgabe 19.*)

(c) Für $f \in C^\infty(\Omega)$ sei $T_f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ wie in Aufgabe 19 definiert. Wir haben dort bereits gezeigt, dass die Abbildung

$$j : C^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)',\ f \mapsto T_f$$

linear und injektiv ist. Finden Sie einen stetig linearen Operator $\tilde{L} : \mathcal{D}(\Omega)' \to \mathcal{D}(\Omega)'$, der $L : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ fortsetzt in dem Sinne, dass

$$j \circ L = \tilde{L} \circ j$$

gilt. Hierbei sei $\mathcal{D}(\Omega)'$ mit der Topologie $\tau_b(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega))$ versehen.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre