UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Ergänzungsblatt Abgabetermin: -

Seien im Folgenden $n, m, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

heißt linear, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$,

(ii) $L(x + y) = L(x) + L(y)$.

Wir schreiben $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ für die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ und $L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Eine $m \times n$-Matrix mit Werten in $\mathbb{R}$ ist eine Tabelle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

mit m Zeilen und n Spalten und Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$. Wir schreiben $M(m \times n, \mathbb{R})$ für die Menge aller solchen Matrizen. Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in M(m \times n, \mathbb{R})$, so definiert man

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$$

mit

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Man rechnet einfach nach, dass die Abbildung L_A linear ist.

Ist umgekehrt $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine beliebige lineare Abbildung, so definiert man die Matrix

$$A_L = \begin{pmatrix} L(e_1) & L(e_2) & \dots & L(e_n) \end{pmatrix}$$

mit Spalten $L(e_1)$,...,$L(e_n)$. Man kann zeigen, dass die Abbildungen

$$\Phi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to M(m \times n, \mathbb{R}), L \mapsto A_L,$$

$$\Psi : M(m \times n, \mathbb{R}) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), A \mapsto L_A$$

invers zueinander sind, d.h. es gilt $\Phi(\Psi(A)) = A$ für alle Matrizen $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $\Psi(\Phi(L)) = L$ für alle linearen Abbildungen $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Da man mit diesen Abbildungen

jederzeit von einer Matrix zur entsprechenden linearen Abbildung übergehen kann und umgekehrt, verwendet man lineare Abbildungen und Matrizen meistens austauschbar.
Sind $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_3 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineare Abbildungen und $\alpha \in \mathbb{R}$, so definiert man (wie auch in allgemeineren Situationen üblich) die linearen Abbildungen

$$L_1 + L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x),$$

$$\alpha L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (\alpha L_1)(x) = \alpha L_1(x),$$

$$L_3 \circ L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, (L_3 \circ L_1)(x) = L_3(L_1(x)).$$

Für Matrizen definiert man Addition, skalare Multiplikation und Multiplikation so, dass sie mit diesen Operationen verträglich sind, d.h. so, dass

$$\Psi(A + B) = \Psi(A) + \Psi(B),$$

$$\Psi(\alpha A) = \alpha \Psi(A),$$

$$\Psi(CA) = \Psi(C) \circ \Psi(A)$$

für alle $A, B \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $C \in M(k \times m, \mathbb{R})$ gilt. Man überlegt sich, dass mit den folgenden Definitionen für alle $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{k,m}$ diese Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{m,n},$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j=1}^{m,n},$$

$$CA = (\sum_{l=1}^{m} c_{il} a_{lj})_{i,j=1}^{k,n}.$$

Für diese Operationen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $A, B, C, D, E, C_1, C_2, D_1, D_2$ Matrizen sind so, dass alle vorkommenden Operationen definiert sind:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(ii) $A + B = B + A$,

(iii) $(CD)E = C(DE)$,

(iv) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(v) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

(vii) $C(D_1 + D_2) = CD_1 + CD_2$,

(viii) $(C_1 + C_2)D = C_1 D + C_2 D$.

Achtung: Für zwei Matrizen $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $B \in M(l \times k, \mathbb{R})$ ist das Matrixprodukt AB nur dann wohldefiniert wenn die Spaltenanzahl n von A mit der Zeilenanzahl l von B übereinstimmt, das heißt wenn $n = l$ gilt. Für zwei Matrizen $C, D \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sind also insbesondere die beiden Produkte CD und DC wohldefiniert. **Aber:** Diese Verknüpfung ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**, d.h. es ist möglich, dass $CD \neq DC$ gilt.