UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Ergänzungsblatt 2 Abgabetermin: -

Invertierbarkeit von Matrizen

Bezüglich der Multiplikation von Matrizen gibt es im $M(n \times n, \mathbb{R})$ ein neutrales Element

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}),$$

d.h. es gilt $AE_n = A = E_n A$ für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Die entsprechende lineare Abbildung $(E_n)_L = \Psi(E_n)$ ist die Identität $\Psi(E_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x$. Wir nennen eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, wenn sie bijektiv ist. Man kann zeigen, dass ihre Umkehrabbildung dann automatisch auch linear ist. Entsprechend nennen wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$AB = E_n$$

gibt. In diesem Fall gilt automatisch auch $BA = E_n$, B ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt und wir schreiben $A^{-1} = B$. Da Multiplikation und Komposition mit den Abbildungen Φ und Ψ veträglich sind, gilt das auch für Invertierbarkeit, d.h. eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist invertierbar genau dann, wenn $\Psi(A) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar ist und in diesem Fall gilt $\Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$ (eine entsprechende Aussage gilt für Φ).

Determinante und ihre Eigenschaften

In der linearen Algebra zeigt man, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Determinantenabbildung

$$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

gibt, die (unter anderem) für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,

(iii) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{2n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.

(iv) $\det(A) = (-1)^m \det(B)$, wenn B durch Anwenden der folgenden Operationen aus A hervorgeht:

- das genau m-fache Tauschen zweier Zeilen (oder Spalten),
- das Subtrahieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) von einer anderen Zeile (oder Spalte).

(v) **Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.**

Die Determinante ist allerdings nicht linear, d.h. es gibt Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Sie ist allerdings linear in jeder einzelnen Spalte (oder Zeile), d.h. es gilt

$$\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i + v_i' & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i & \cdots & v_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i' & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

für eine Matrix mit Spalten zusammengesetzt aus $v_1, \cdots, v_i, v_i', \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

Für Matrizen aus $M(2\times 2, \mathbb{R})$ und $M(3\times 3, \mathbb{R})$ ist es sehr einfach, die Determinante zu berechnen. Für $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \text{ und } \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geq 4$, so gibt es keine einfache geschlossene Formel für die Berechnung von $\det(A)$ (eine solche Formel enthält einen Summanden für jede Möglichkeit, die Zahlen $1, ..., n$ zu permutieren, d.h. $n!$ viele). Mit den Regeln (*iii*) und (*iv*) von oben kann man aber auch in diesem Fall die Determinante einer Matrix berechnen.

Eigenwerte von Matrizen

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit

$$Ax = \lambda x,$$

so nennt man λ Eigenwert von A und x Eigenvektor von A zu diesem Eigenwert. Da die Gleichung $Ax = \lambda x$ äquivalent zu $(A - \lambda E_n)x = 0$ ist, sind die Eigenwerte von A genau die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $A - \lambda E_n$ nicht invertierbar ist, also genau die Nullstellen des Polynoms

$$\det(A - tE_n) \in \mathbb{R}[t].$$

Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n\times n, \mathbb{R})$, so schreibt man $A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^n$ für die sogenannte transponierte Matrix zu A, die man erhält, indem man die Spalten von A (in der richtigen Reihenfolge) zu den Zeilen von A^T macht. Gilt $A = A^T$, so nennt man A symmetrisch. Man kann zeigen, dass es zu einer symmetrischen Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ immer Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ gibt so, dass $S = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar ist und

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

die Diagonalmatrix ist, die als Einträge die (nicht unbedingt verschiedenen!) Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ von A hat. Man nennt Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, für die es eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$S^{-1}AS = B$$

gibt, konjugiert. In der linearen Algebra überlegt man sich, dass konjugierte Matrizen einfach Darstellungen derselben linearen Abbildung bezüglich verschiedener Basen sind (auf dem ersten Ergänzungsblatt wurden nur Matrixdarstellungen bezüglich der Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$ vorgestellt).