

Analysis II

Jörg Eschmeier

Universität des Saarlandes

Sommersemester 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische Räume	1
2	Grenzwerte und Stetigkeit	10
3	Kompaktheit	19
4	Kurven im $\mathbb{R}^n$	24
5	Partielle Ableitungen	31
6	Totale Differenzierbarkeit	39
7	Die Taylorsche Formel	49
8	Implizite Funktionen	57
9	Parameterabhängige Integrale	68
10	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit	77
11	Elementare Lösungsmethoden	82
12	Lineare Differentialgleichungen	88
13	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	98
	Literatur	108

1 Metrische Räume

Sei X eine nichtleere Menge.

Definition 1.1. Eine Abbildung: $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf X , falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

- (i) $d(x, y) \geq 0$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung),
- (iv) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge $X \neq \emptyset$ und einer Metrik d auf X .

Beispiele 1.2. Einfache Beispiele metrischer Räume sind

- (a) $\mathbb{R}$ zusammen mit der Betragsmetrik $d(x, y) = |x - y|$,
- (b) $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der Summenmetrik $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
- (c) Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge, so definiert $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) = d(x, y)$ eine Metrik auf A (*Relativmetrik* von d auf A).
- (d) Ist $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, so definiert $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = 0 \text{ für } x = y, \quad d(x, y) = 1 \text{ für } x \neq y$$

eine Metrik auf X (die *triviale* oder *diskrete* Metrik auf X).

Definition 1.3. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen oder über dem Körper $K = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

heißt *Norm* auf V , falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

- (i) $\|x\| \geq 0$,
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
- (iv) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

Ein *normierter K -Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem K -Vektorraum V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V .

Aus der in (iii) geforderten Dreiecksungleichung folgt sehr einfach die Dreiecksungleichung nach unten. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|.$$

Zum Beweis beachte man, dass $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ und daher auch $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ gilt und dass man durch Vertauschen der Rollen von x und y auch die Abschätzung $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ erhält.

Lemma 1.4. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter K -Vektorraum, so definiert*

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf V .

Beweis. Die Dreiecksungleichung für d folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für die Norm, denn für alle $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x, y) = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Die übrigen Eigenschaften einer Metrik rechnet man genauso einfach nach. □

Beispiele 1.5. (a) Auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) werden Normen definiert durch

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^n\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| && (\text{Summennorm}), \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} && (\text{euklidische Norm}), \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i| && (\text{Maximumnorm}). \end{aligned}$$

Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2).$$

Damit folgt für beliebige Elemente $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_2} \frac{|y_i|}{\|y\|_2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2}{\|x\|_2^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^2}{\|y\|_2^2} = 1$$

oder äquivalent

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Für beliebige Vektoren $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)(\bar{x}_i + \bar{y}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(x_i \bar{y}_i) \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.
\end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion monoton wächst, folgt die behauptete Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

- (b) Sei V ein K -Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) mit *Skalarprodukt*, das heißt einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \langle x, y \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0.$$

In der Linearen Algebra zeigt man, dass durch

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf V definiert wird.

Bemerkung 1.6. Für alle $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \\
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Im Folgenden seien $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, wenn nichts anderes gesagt wird, immer mit der *euklidischen Metrik*

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2$$

versehen. Für die euklidische Norm schreiben wir einfach $\|x\|$ statt $\|x\|_2$.

Beispiele 1.7. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und sei $B(X) = \{f; f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X (mit den punktweise definierten Verknüpfungen). Dann definiert

$$\|\cdot\|_X : B(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

eine Norm auf $B(X)$ (die *Supremumnorm*). Zum Beweis der Dreiecksungleichung beachte man, dass für alle $f, g \in B(X)$ gilt

$$\|f + g\|_X = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \|f\|_X + \|g\|_X.$$

Lemma 1.8. Sei $p \in (1, \infty)$ und sei q der zu p konjugierte Exponent, das heißt die reelle Zahl $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $a, b > 0$ die Ungleichung

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Beweis. Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $a \geq b$ ist (sonst vertausche man a mit b und p mit q). Da $\frac{1}{p} - 1 < 0$ ist, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $x \geq 1$

$$x^{\frac{1}{p}} - 1 = \int_1^x \left(t^{\frac{1}{p}}\right)' dt = \int_1^x \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt \leq \int_1^x \left(\frac{t}{p}\right)' dt = \frac{x}{p} - \frac{1}{p}.$$

Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ impliziert dies, dass $x^{1/p} \leq \frac{x}{p} + \frac{1}{q}$ für alle $x \geq 1$ gilt. Insbesondere folgt hieraus für $x = \frac{a}{b}$ die Abschätzung

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} b \leq \frac{1}{p} \frac{a}{b} b + \frac{1}{q} b = \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Indem man Lemma 1.8 anwendet mit a^p und b^q statt a und b , sieht man, dass für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beispiele 1.9. (a) Sei $p \in [1, \infty)$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$C[a, b] = \{f; f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird eine Norm definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung. Für $p = 1$ folgt die Dreiecksungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ und der Monotonie des Riemannintegrals. Sei also $p \in (1, \infty)$. Sei $q > 1$ der konjugierte Exponent zu p wie in Lemma 1.8. Wir fixieren zwei Funktionen $f, g \in C[a, b]$ und zeigen zunächst, dass

$$\int_a^b |fg| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (\text{Höldersche Ungleichung}).$$

Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $f \not\equiv 0 \not\equiv g$. Mit Lemma 1.8 folgt zunächst, dass

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

punktweise auf $[a, b]$ gilt. Mit der Monotonie und Linearität des Riemannintegrals erhält man die Höldersche Ungleichung

$$\int_a^b \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} dt \leq \frac{1}{p} \int_a^b \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} dt + \frac{1}{q} \int_a^b \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung zeigen wir, dass

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Minkowskische Ungleichung})$$

ist. Indem man benutzt, dass $\frac{p}{q} = p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$ ist, erhält man für alle $t \in [a, b]$ die Ungleichung

$$|f(t) + g(t)|^p \leq |f(t)| |f(t) + g(t)|^{\frac{p}{q}} + |g(t)| |f(t) + g(t)|^{\frac{p}{q}}.$$

Durch Integrieren erhält man unter Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt &\leq \int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{\frac{p}{q}} dt + \int_a^b |g(t)| |f(t) + g(t)|^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_a^b |f + g|^p dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sehr leicht die Minkowskische Ungleichung und damit die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$. Es genügt, im Falle $f \neq -g$ durch das letzte in der obigen Ungleichungskette auftretende Integral zu dividieren. $\square$

(b) Ganz ähnlich wie im Teil (a) folgt, dass für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_i)_{i=1}^n\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Definition 1.10. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $a \in X$ ein Punkt in X , $U \subset X$, $F \subset X$ zwei Teilmengen von X .

(a) Für $r > 0$ (bzw. $r \geq 0$) nennt man

$$B_r(a) = \{x \in X; d(x, a) < r\} \quad (\text{bzw. } \overline{B}_r(a) = \{x \in X; d(x, a) \leq r\})$$

die *offene* (bzw. *abgeschlossene*) *Kugel* mit Radius r um a .

- (b) Die Menge U heißt *Umgebung* von a , falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(a) \subset U$.
- (c) Man nennt die Menge $U \subset X$ *offen*, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B_\epsilon(x) \subset U$. Die Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus F \subset X$ eine offene Menge ist.

Beispiele 1.11. (a) Offene Kugeln in metrischen Räumen sind offene Teilmengen, denn ist $x \in B_r(a)$, so ist $s = r - d(x, a) > 0$ und mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $y \in B_s(x)$:

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < s + d(x, a) = r.$$

- (b) Ganz ähnlich folgt mit der Dreiecksungleichung, dass jede abgeschlossene Kugel in einem metrischen Raum X eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
- (c) Die offenen Kugeln in $\mathbb{R}$ (bezüglich der Betragsmetrik) sind genau die offenen Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
- (d) Das halboffene Intervall $[0, 1[$ ist als Teilmenge des metrischen Raumes $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Satz 1.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x, V von y in X mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ist $\epsilon = d(x, y) > 0$ und $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(y) = \emptyset$, denn gäbe es einen Punkt $z \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$, so wäre

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = d(x, y).$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ und $B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$ disjunkte Umgebungen von x und y sind. □

Definition 1.13. Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen *äquivalent*, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt so, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$\frac{1}{c}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq cd_1(x, y).$$

Bemerkung. (a) Nach Bemerkung 1.6 sind auf $\mathbb{R}^n$ die Metriken

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1, \quad d_2(x, y) = \|x - y\|_2, \quad d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty.$$

äquivalent.

- (b) Sind d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X , so besitzen die metrischen Räume $(X, d_1), (X, d_2)$ dieselben offenen Mengen. Zum Beweis beachte man, dass für jedes $a \in X$ und jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ die Inklusionen

$$B_{\frac{\epsilon}{c}}^{d_1}(a) \subset B_\epsilon^{d_2}(a), \quad B_{\frac{\epsilon}{c}}^{d_2}(a) \subset B_\epsilon^{d_1}(a)$$

gelten, falls $c > 0$ eine Konstante wie in Definition 1.13 ist.

Satz 1.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) (i) $\emptyset, X$ sind offen in X .
(ii) Sind $U, V \subset X$ offen, so ist auch $U \cap V \subset X$ offen.
(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen in X , so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ offen.
- (b) (i) $\emptyset, X$ sind abgeschlossen in X .
(ii) Sind $F, G \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $F \cup G \subset X$ abgeschlossen.
(iii) Ist $(F_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Mengen in X , so ist auch $\bigcap_{i \in I} F_i \subset X$ abgeschlossen.

Beweis. (a) Offensichtlich sind $\emptyset, X \subset X$ offen. Sind $U, V \subset X$ offen und ist $x \in U \cap V$, so gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$, $B_{\epsilon_2}(x) \subset V$. Dann ist $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U \cap V$. Sind $U_i \subset X (i \in I)$ offen und ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

(b) Die in (b) behaupteten Eigenschaften abgeschlossener Mengen folgen aus Teil (a) durch Übergang zu Komplementen. $\square$

Nicht endliche Durchschnitte offener Mengen sind im Allgemeinen nicht offen. So ist etwa

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen in $\mathbb{R}$, der nicht offen ist.

Bezüglich den euklidischen Metriken auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{n+m}$ gilt für beliebige Elemente $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ und jede reelle Zahl $\epsilon > 0$

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(a) \times B_{\frac{\epsilon}{2}}(b) \subset B_\epsilon(a, b) \subset B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b).$$

Die erste Inklusion folgt aus den Abschätzungen

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \|(x - a, 0) + (0, y - b)\| \leq \|x - a\| + \|y - b\|,$$

die zweite folgt aus

$$\max(\|x - a\|, \|y - b\|) \leq \|(x - a, y - b)\| = \|(x, y) - (a, b)\|.$$

Lemma 1.15. (a) Sind $F \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen, so ist $F \times G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abgeschlossen.

(b) Sind $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, so ist $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen.

Beweis. (a) Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus (F \times G)$, so ist $x \notin F$ oder $y \notin G$. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ oder $B_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^m \setminus G$. Dann ist aber $B_\epsilon((x, y)) \subset B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus (F \times G)$.

(b) Ist $(x, y) \in U \times V$, so gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\epsilon_2}(y) \subset V$. Dann ist $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ und $B_\epsilon((x, y)) \subset B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset U \times V$. $\square$

Indem man Lemma 1.15 mehrfach (induktiv) anwendet, sieht man, dass in $\mathbb{R}^n$ Mengen der Form

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{abgeschlossene Quader})$$

abgeschlossen und Mengen der Form

$$\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\quad (\text{offene Quader})$$

offen sind.

Definition 1.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Man definiert

$$\overline{M} = \{x \in X; \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ ist } U \cap M \neq \emptyset\} \quad (\text{Abschluss von } M),$$

$$\text{Int}(M) = \{x \in X; \text{ es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } U \subset M\} \quad (\text{Inneres von } M),$$

$$\partial M = \{x \in X; \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ ist } U \cap M \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus M)\} \quad (\text{Rand von } M).$$

Lemma 1.17. Für $M \subset X$ gilt

(a) $\overline{M} = \bigcap \{F \subset X \text{ abgeschlossen}; M \subset F\}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

(b) $\text{Int}(M) = \bigcup \{U \subset X \text{ offen}; U \subset M\}$ ist die größte offene Menge in X , die in M enthalten ist.

(c) $\partial M \subset X$ ist abgeschlossen.

(d) $\overline{M} = M \cup \partial M = \text{Int}(M) \cup \partial M$ und $\text{Int}(M) = M \cap (X \setminus \partial M)$.

Beweis. (a) Sei $x \in \overline{M}$ und $F \supset M$ eine abgeschlossene Menge in X . Die Annahme, dass $x \in X \setminus F$ gilt, führt zu dem Widerspruch, dass $(X \setminus F) \cap M \neq \emptyset$ sein müsste. Also liegt x im Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M . Sei x umgekehrt enthalten in diesem Durchschnitt und sei U eine Umgebung von x . Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U$. Wäre $U \cap M = \emptyset$, so wäre $X \setminus B_\epsilon(x) \supset M$ eine abgeschlossene Obermenge von M und folglich wäre $x \in X \setminus B_\epsilon(x)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $x \in \overline{M}$. Der Durchschnitt in (a) ist nach Satz 1.14(b) abgeschlossen und ist offensichtlich in jeder abgeschlossenen Obermenge von M enthalten.

(b) Die behauptete Darstellung von $\text{Int}(M)$ folgt direkt aus der Definition des Inneren und Satz 1.14(a).

(c) Ist $x \in X \setminus \partial M$, so gibt es eine offene Umgebung U von x mit $U \cap M = \emptyset$ oder $U \cap (X \setminus M) = \emptyset$. Da eine offene Menge Umgebung jedes ihrer Punkte ist, ist $U \subset X \setminus \partial M$. Als Vereinigung offener Mengen ist $X \setminus \partial M$ offen und daher $\partial M \subset X$ abgeschlossen.

(d) Direkt aus den Definitionen folgt, dass

$$\text{Int}(M) \cup \partial M \subset M \cup \partial M \subset \overline{M}.$$

Ist $x \in \overline{M} \setminus \partial M$, so gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap (X \setminus M) = \emptyset$. Also ist $U \subset M$ und $x \in \text{Int}(M)$. Damit ist die Gleichheit aller drei Mengen gezeigt. Offensichtlich ist $\text{Int} M \subset M \cap (X \setminus \partial M)$.

Die umgekehrte Inklusion wurde gerade gezeigt. $\square$

Korollar 1.18. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $M = \overline{M}$ ist.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.17(a). □

Beispiele.

(a) In $\mathbb{R}^n$ ist $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\} = \partial \overline{B}_r(a)$.

(b) Der Rand von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$.

(c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\overline{]a, b[} = [a, b]$, falls $a < b$ ist, und $\text{Int}([a, b]) =]a, b[$, falls $a \leq b$ ist.

Definition 1.19. Sei $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge. Ein System

$$t \subset \mathcal{P}(X) (= \{A; A \subset X\})$$

heißt *Topologie* auf X , falls

(i) $\emptyset, X \in t$,

(ii) für $U, V \in t$ auch $U \cap V \in t$ gilt,

(iii) für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Mengen $U_i \in t$ auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in t$ gilt.

Nach Satz 1.14 bilden für einen metrischen Raum (X, d) die offenen Mengen $U \subset X$ eine Topologie auf X . Es gibt Topologien, die nicht von einer Metrik induziert werden. Zum Beispiel ist $t = \{X, \emptyset\}$ eine Topologie auf X , aber nach Satz 1.12 kann es, wenn X mehr als ein Element enthält, keine Metrik auf X geben, bezüglich der nur die Mengen X und $\emptyset$ offen sind.

2 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir benutzen die Bezeichnungen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Definition 2.1 (Konvergenz). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$ beliebig. Man sagt, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und schreibt dafür $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, falls für jede Umgebung U von x ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_k \in U$ für alle $k \geq k_0$.

Nach Definition des Umgebungsbegriffs bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ genau, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_k, x) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Bemerkung.

Äquivalente Metriken (siehe Definition 1.13) liefern dieselben konvergenten Folgen.

Lemma 2.2. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$ in $\mathbb{R}$ ist für jedes $\nu = 1, \dots, n$.

Beweis. Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ in $\mathbb{R}^n$ und sei $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - a\| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Nach Definition der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt dann auch $|x_{k\nu} - a_\nu| \leq \|x_k - a\| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Sei umgekehrt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$ in $\mathbb{R}$ für $\nu = 1, \dots, n$ und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert für jedes $\nu = 1, \dots, n$ ein $k_\nu \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k\nu} - a_\nu| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ für alle $k \geq k_\nu$. Für $k \geq \max\{k_1, \dots, k_n\}$ folgt, dass $\|x_k - a\| = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_{k\nu} - a_\nu|^2\right)^{1/2} < \epsilon$. $\square$

Genauso sieht man, dass eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^n$ gegen ein $a \in \mathbb{C}^n$ konvergiert, wenn sie komponentenweise gegen a konvergiert.

Satz 2.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist

$$\overline{M} = \{x \in X; \text{ es gibt eine Folge } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } M \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x\}.$$

Beweis. Ist $x \in \overline{M}$, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ ein $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap M$. Dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Sei umgekehrt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ und sei U eine Umgebung von x . Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \geq k_0$. Insbesondere ist $U \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Definition 2.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum

- (a) Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ für alle $k, \ell \geq k_0$.

- (b) Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.
- (c) Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig* (oder *Banachraum*), falls V mit der induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Satz 2.5. *Die normierten Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind vollständig.*

Beweis. Sei K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und sei $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in K^n mit

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \quad (k \geq 0).$$

Da für $\nu = 1, \dots, n$ und $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|x_{k\nu} - x_{\ell\nu}| \leq \|x_k - x_\ell\|$ gilt, sind die Folgen $(x_{k\nu})_{k \geq 0}$ ($\nu = 1, \dots, n$) Cauchy-Folgen in K . Da K vollständig ist, existieren die Limiten

$$a_\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

in K . Aus Lemma 2.2 folgt, dass die Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in K^n gegen $(a_1, \dots, a_n)$ konvergiert. $\square$

In metrischen Räumen gilt eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips.

Satz 2.6 (Schachtelungsprinzip). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $(A_k)_{k \geq 0}$ eine Folge abgeschlossener Mengen in X mit*

$$\emptyset \neq A_{k+1} \subset A_k$$

für alle $k \geq 0$ und so, dass die Folge der durch

$$\text{diam}(A_k) = \sup\{d(x, y); x, y \in A_k\}$$

definierten Durchmesser der Mengen A_k gegen 0 konvergiert. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $\{x\} = \bigcap_{k \geq 0} A_k$.

Beweis. Wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Element $x_k \in A_k$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(A_k) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ für alle $k, \ell \geq k_0$. Also ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) . Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von (X, d) existiert der Limes $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ in X . Nach Satz 2.3 (siehe auch Korollar 1.18) folgt aus der Abgeschlossenheit der Mengen A_k und der Bedingung, dass die Mengen A_k mit wachsendem k kleiner werden, dass

$$x = \lim_{\substack{\ell \rightarrow \infty \\ \ell \geq k}} x_\ell \in A_k$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $y \in X$ ein weiteres Element mit $y \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $d(x, y) \leq \text{diam}(A_k)$ für alle k und damit $d(x, y) = 0$. Also besteht der Durchschnitt aller Mengen A_k genau aus dem einen Element x . $\square$

Definition 2.7 (*Stetigkeit*). Seien (X, d) , (Y, d') metrische Räume, $D \subset X$ eine Teilmenge und sei $f : D \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) Für $a \in \overline{D}$ und $c \in Y$ schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

falls $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = c$ ist für jede Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

(b) Die Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt *stetig in einem Punkt* $a \in D$, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ist.

(c) Die Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Man sieht sehr leicht, dass eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ wie in der letzten Definition stetig ist (oder stetig in einem Punkt $a \in D$ ist) genau dann, wenn f als Funktion von D versehen mit der Relativmetrik von X nach Y dieselbe Eigenschaft hat (siehe Beispiel 1.2(c)).

Satz 2.8. Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis. Ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ in Y , da f stetig ist, und $\lim_{k \rightarrow \infty} g \circ f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(x_k)) = g(f(a))$ in Z , da g stetig ist. $\square$

Lemma 2.9. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Die Koordinatenprojektionen

$$\pi_\nu : K^n \rightarrow K, (x_i)_{i=1}^n \mapsto x_\nu (\nu = 1, \dots, n)$$

sind stetig.

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^n$ (und genauso in $\mathbb{C}^n$) äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz. Insbesondere impliziert Konvergenz in K^n komponentenweise Konvergenz. Das ist äquivalent zur Stetigkeit der Koordinatenprojektionen $\pi_1, \dots, \pi_n$. $\square$

Als Folgerung erhält man, dass eine Abbildung mit Werten in K^n ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) genau dann stetig ist, wenn alle Koordinatenfunktionen stetig sind.

Satz 2.10. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow K^n$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) eine Abbildung. Die Abbildung f ist stetig genau dann, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen $f_\nu = \pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ stetig sind.

Beweis. Ist $f : X \rightarrow K^n$ stetig, so sind die Koordinatenfunktionen $\pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ ($\nu = 1, \dots, n$) nach Satz 2.8 und Lemma 2.9 als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle Koordinatenfunktionen $\pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ ($\nu = 1, \dots, n$) stetig. Ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, so konvergiert die Folge $(f(x_k))_{k \geq 0}$ wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_\nu(f(x_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\pi_\nu \circ f)(x_k) = (\pi_\nu \circ f)(a) = \pi_\nu(f(a)) \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

komponentenweise in K^n gegen $f(a)$. Nach Lemma 2.2 gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ in K^n . $\square$

Die Grenzwertsätze in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) besagen gerade, dass die algebraischen Operationen Addition, Multiplikation, Quotientenbildung stetige Abbildungen zwischen geeignet definierten metrischen Räumen sind.

Satz 2.11. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $K^* = K \setminus \{0\}$. Versieht man $K^2 = K \times K$ mit der euklidischen Metrik, so sind die Abbildungen*

- (a) $\text{add} : K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto x + y,$
- (b) $m : K \times K, (x, y) \mapsto x \cdot y,$
- (c) $q : K \times K^* \rightarrow K, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$

stetig.

Beweis. Sei $((x_k, y_k))_{k \geq 0}$ eine Folge mit Limes (x, y) in $K \times K$ (bzw. $K \times K^*$). Nach Lemma 2.2 gilt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ in K und $y_k \neq 0 \neq y$ im Falle (c). Nach den Grenzwertsätzen aus der Analysis I folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = x + y$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \cdot y_k) = x \cdot y$ und im Falle (c) auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{y_k} = \frac{x}{y}$ ist. Nach Definition 2.7 bedeutet dies genau, dass die angegebenen drei Abbildungen stetig sind. $\square$

Korollar 2.12. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $f, g : X \rightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) stetig. Dann sind auch*

- (a) $f + g : X \rightarrow K, x \mapsto f(x) + g(x), f \cdot g : X \rightarrow K, x \mapsto f(x)g(x)$ und
- (b) $\frac{f}{g} : X_0 = \{x \in X; g(x) \neq 0\} \rightarrow K, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

stetig.

Beweis. Nach Satz 2.10 sind die Abbildungen

$$(f, g) : X \rightarrow K^2, x \mapsto (f(x), g(x))$$

und, wenn man $K \times K^*$ mit der Relativmetrik von $K \times K$ versieht,

$$(f, g), X_0 \rightarrow K \times K^*, x \mapsto (f(x), g(x))$$

stetig. Nach den Sätzen 2.8 und 2.11 sind dann auch

$$f + g = \text{add} \circ (f, g), \quad f \cdot g = m \circ (f, g), \quad \frac{f}{g} = q \circ (f, g) : X_0 \rightarrow K$$

als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig. $\square$

Beispiel 2.13. (a) Ein *Monom vom Grade r* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

wobei $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ feste Zahlen sind mit $k_1 + \dots + k_n = r$. Eine *Polynomfunktion vom Grade $\leq r$* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \\ k_1 + \dots + k_n \leq r}} c_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

wobei $c_{k_1 \dots k_n}$ fest gegebene reelle Zahlen seien. Nach Lemma 2.9 und Korollar 2.12 (endlich oft angewendet) sind diese Funktionen stetig.

(b) Ist V ein normierter Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, so ist die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ stetig. Dies folgt direkt aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung nach unten (siehe die Bemerkung zu Definition 1.3)

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in V).$$

Wie in der Analysis I kann man auch die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen mit einem geeigneten ϵ - δ -Kriterium beschreiben.

Satz 2.14 (ϵ - δ -Kriterium). *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $a \in X$. Die Abbildung f ist stetig in a genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a)).$$

Beweis. Sei f stetig in a und sei $\epsilon > 0$. Gäbe es kein δ mit der behaupteten Eigenschaft, so würde zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein Element $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$ existieren mit $f(x_k) \notin B_\epsilon(f(a))$. Dann würde $(x_k)_{k \geq 1}$ gegen a in X konvergieren, aber $(f(x_k))_{k \geq 1}$ würde nicht in Y gegen $f(a)$ konvergieren. Dies widerspricht der vorausgesetzten Stetigkeit von f in a .

Sei umgekehrt das angegebene ϵ - δ -Kriterium im Punkt a erfüllt. Konvergiert $(x_k)_{k \geq 0}$ in X gegen a und ist $\epsilon > 0$, so gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. Zu dem so gewählten $\delta > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in B_\delta(a)$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist $d(f(x_k), f(a)) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Also konvergiert $(f(x_k))_{k \geq 0}$ in Y gegen $f(a)$, und die Stetigkeit von f in a ist gezeigt. $\square$

Beispiel 2.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$ eine Menge. Für $x \in X$ definiert man den Abstand von x zu A durch

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Die Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ ist stetig. Es gilt sogar

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Zum Beweis seien $x, y \in X$ beliebig. Dann gilt für alle $a \in A$

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Indem man auf beiden Seiten das Infimum bildet, erhält man

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq \inf_{a \in A} (d(x, y) + d(y, a)) = d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a).$$

oder äquivalent

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Durch vertauschen von x, y erhält man, dass auch

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$$

gilt. Hieraus folgt die behauptete Ungleichung und damit auch die Stetigkeit der Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$.

Definition 2.16 (*Gleichmäßige Konvergenz*). Seien X, Y metrische Räume und seien $f_n : X \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$), $f : X \rightarrow Y$ Abbildungen. Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert definitionsgemäß *gleichmäßig* auf X gegen die Abbildung f , falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ gilt.

Offensichtlich ist die definierende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gegen f äquivalent dazu, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Satz 2.17. Seien X, Y metrische Räume und seien $f_n : X \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$), $f : X \rightarrow Y$ Abbildungen. Sind alle f_n ($n \in \mathbb{N}$) stetig und konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf X gegen f , so ist auch $f : X \rightarrow Y$ stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und sei $\epsilon > 0$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in X$ und alle $n \geq n_0$. Da f_{n_0} stetig ist in x_0 , gibt es nach dem ϵ - δ -Kriterium ein $\delta > 0$ mit $f_{n_0}(B_\delta(x_0)) \subset B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_{n_0}(x_0))$. Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $x \in B_\delta(x_0)$, dass

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

gilt. Also ist f stetig in x_0 . □

Für die Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen gibt es andere nützliche Kriterien.

Satz 2.18. *Seien V, W normierte K -Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt mit $\|Ax\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in V$.*

Beweis. Sei A stetig. Da A stetig ist im Punkt $x = 0$ mit $A0 = 0$, gibt es nach dem ϵ - δ -Kriterium (Satz 2.14) zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $AB_\delta(0) \subset B_1(0)$. Da für alle $x \in V \setminus \{0\}$

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta}\|x\| \left\| A \left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$

gilt, ist das behauptete Stetigkeitskriterium erfüllt mit $c = \frac{2}{\delta}$. Ist umgekehrt $c > 0$ eine Konstante wie im Satz und sind $x_0 \in V$, $\epsilon > 0$ gegeben, so gilt

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq c\|x - x_0\| < \epsilon$$

für alle $x \in V$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{c}$. Nach dem ϵ - δ -Kriterium ist A stetig in jedem Punkt $x_0 \in V$. □

Beispiele.

- (a) Versieht man den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ ist stetig}\}$ mit der Norm (siehe Beispiel 1.7)

$$\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

so definiert

$$I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f dt$$

eine stetige lineare Abbildung. In der Analysis I wurde gezeigt, dass das Riemann-Integral linear ist.

Die Stetigkeit von I folgt mit Satz 2.18 aus der Gültigkeit der Abschätzung

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f dt \right| \leq \int_a^b |f| dt \leq \int_a^b \|f\|_{[a,b]} dt = (b-a)\|f\|_{[a,b]},$$

die ebenfalls in der Analysis I (Satz 16.13(b) in [EAI]) für alle stetigen Funktionen $f \in C[a, b]$ gezeigt wurde.

- (b) Sei der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C^1[0, 1] = \{f; f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{[0,1]}$ aus Teil (a) versehen. Dann ist die Abbildung

$$D : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], f \mapsto f'$$

linear, aber nicht stetig. Die Linearität ist klar. Da die Funktionen $f_n \in C^1[0, 1]$ definiert durch $f_n(x) = x^n$ die Norm $\|f_n\|_{[0,1]} = 1$ besitzen, aber die Folge der Normen

$$\|f'_n\|_{[0,1]} = \|nx^{n-1}\|_{[0,1]} = n \quad (n \geq 1)$$

unbeschränkt ist, folgt mit Satz 2.18, dass die Abbildung D nicht stetig ist.

Definition 2.19. Seien V, W normierte K -Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung. Dann heißt

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; \|x\| \leq 1\}$$

die *Norm* oder *Operatornorm* von A .

Nach Satz 2.18 ist $\|A\| \in [0, \infty)$. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; \|x\| < 1\} = \sup\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$$

gilt und dass die Operatornorm wirklich eine Norm auf dem K -Vektorraum

$$\{A : V \rightarrow W; A \text{ ist linear und stetig}\}$$

definiert.

Lemma 2.20. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist jede lineare Abbildung $A : K^n \rightarrow K^m$ stetig.

Beweis. Da die konvergenten Folgen bezüglich der Summenmetrik $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ und der euklidischen Metrik $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ sowohl in K^n als auch in K^m dieselben sind (Bemerkung 1.6), genügt es zu zeigen, dass $A : K^n \rightarrow K^m$ bezüglich der Summennormen auf K^n und K^m stetig ist. Da für alle $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\| \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \|A e_i\| \right) \|x\|_1$$

gilt, folgt dies direkt aus Satz 2.18. Hierbei bezeichnet $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den i -ten kanonischen Einheitsvektor in K^n . □

Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ sei $M_A : K^n \rightarrow K^m$, $x \mapsto Ax = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq m}$ der Operator der Multiplikation mit der $(m \times n)$ -Matrix A . Wie immer, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, seien die K -Vektorräume K^n, K^m mit ihrer euklidischen Norm versehen.

Lemma 2.21. Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$. Durch

$$\|\cdot\| : M(m \times n, K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| = \|M_A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|M_A x\|$$

wird eine Norm auf $M(m \times n, K)$ definiert. Es gilt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

für alle $A \in M(m \times n, K)$ und $x \in K^n$.

Beweis. Nach Lemma 2.20 ist $\|A\| \in [0, \infty)$. Für $A, B \in M(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$$

und

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Für $x \in K^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\|Ax\| = \|A \left(\frac{x}{\|x\|} \right)\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Insbesondere ist $A = 0$ genau dann, wenn $\|A\| = 0$ ist. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. $\square$

Bemerkung 2.22. Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ gilt

$$\max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \leq \|A\| \leq \sqrt{mn} \max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Zum Beweis der ersten Ungleichung beachte man, dass für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\|A\| \geq \|Ae_j\| = \|(a_{\mu j})_{1 \leq \mu \leq m}\| \geq |a_{ij}|.$$

Sei $\alpha = \max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Für $x = (x_i) \in K^n$ mit $\|x\| \leq 1$ und $y = (y_i) = Ax \in K^m$ folgt mit Bemerkung 1.6 und Beispiel 1.5(a), dass

$$\begin{aligned} |y_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \|(a_{ij})_{1 \leq j \leq n}\|_2 \|x\|_2 \\ &\leq \sqrt{n} \max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}| \leq \sqrt{n} \alpha \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Also ist $\|y\|_2 \leq \sqrt{m} \max_{i=1, \dots, m} |y_i| \leq \sqrt{nm} \alpha$. Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen. Als Anwendung dieser beiden Ungleichungen erhält man, dass eine Folge von Matrizen in $M(m \times n, K)$ genau dann konvergiert, wenn sie koeffizientenweise konvergiert, und dass eine Funktion von einem metrischen Raum mit Werten in $M(m \times n, K)$ genau dann stetig ist, wenn alle Koeffizientenfunktionen als K -wertige Abbildungen stetig sind.

Satz 2.23. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ von V unter f eine offene Teilmenge von X ist.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und seien $V \subset Y$ offen, $x \in f^{-1}(V)$. Da V offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Nach dem ϵ - δ -Kriterium der Stetigkeit (Satz 2.14) gibt es zu ϵ ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Also haben wir zu jedem Punkt $x \in f^{-1}(V)$ ein $\delta > 0$ gefunden mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$. Damit ist die Offenheit von $f^{-1}(V)$ gezeigt.

Sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Teilmenge $V \subset Y$ unter f offen in X . Für $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ist dann die durch $U = f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ definierte Menge U offen in X . Wegen $x \in U$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Dann folgt aber $f(B_\delta(x)) \subset f(U) \subset B_\epsilon(f(x))$, und die Stetigkeit von f in jedem Punkt $x \in X$ ist gezeigt. $\square$

3 Kompaktheit

In der Analysis I zeigt man, dass stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen $[a, b]$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind und dass sie ihr Supremum und Infimum annehmen. Wir wollen als nächstes zeigen, dass diese Sätze in viel allgemeineren Situationen richtig bleiben.

Sei im Folgenden (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.1. Sei $A \subset X$. Unter einer *offenen Überdeckung* von A versteht man eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen $U_i \subset X$ mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

und beliebiger Indexmenge I .

Welche Eigenschaft von Intervallen der Form $[a, b]$ braucht man, um die oben erwähnten Sätze aus der Analysis I zu beweisen?

Definition 3.2 (Kompaktheit). Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt*, falls für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ existieren mit $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

Beispiele 3.3. (a) Ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ in (X, d) , so ist die Menge $K = \{x_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset X$ kompakt.

Denn ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$ und dazu einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U_j$ für alle $k > k_0$. Für $k = 0, \dots, k_0$ gibt es Indizes $i_0, \dots, i_{k_0} \in I$ mit $x_k \in U_{i_k}$ für $k = 0, \dots, k_0$. Dann ist aber $K \subset U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}} \cup U_j$.

(b) Die Teilmenge $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Denn die offenen Mengen $U_1 =]\frac{1}{2}, 2[$, $U_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ ($n \geq 2$) bilden eine offene Überdeckung von A . Da $U_n \cap A = \{\frac{1}{n}\}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$, enthält $(U_n)_{n \geq 1}$ keine endliche Teilüberdeckung der Menge A .

Der nächste Satz zeigt insbesondere, dass abgeschlossene, beschränkte Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt sind.

Satz 3.4. Seien $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu \leq b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$. Dann ist die Menge $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Q . Wir nehmen an, dass diese Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung von Q enthält. Unter dieser Annahme definieren wir rekursiv eine Folge $(Q_k)_{k \geq 0}$ abgeschlossener Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $Q_0 = Q$ ist und für alle $k \geq 0$ gilt (i) $Q_k \subset Q_{k-1}$,

(ii) Q_k kann nicht durch endlich viele U_i ($i \in I$) überdeckt werden,

(iii) $\text{diam}(Q_k) = 2^{-k} \text{diam}(Q)$.

Dabei sei definitionsgemäß $Q_{-1} = \mathbb{R}^n$. Dazu definieren wir $Q_0 = Q$. Sind $Q_0, \dots, Q_m$ gewählt mit (i)-(iii) für $k = 0, \dots, m$ und ist $Q_m = I_1 \times \dots \times I_m$ mit geschlossenen Intervallen $I_\nu \subset \mathbb{R}$, so stellen wir I_ν durch Halbieren dar als Vereinigung

$$I_\nu = I_\nu^1 \cup I_\nu^2$$

zweier abgeschlossener Intervalle halber Länge und definieren für $s = (s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n$

$$Q_m^s = I_1^{s_1} \times \dots \times I_n^{s_n}.$$

Dann ist

$$Q_m = \bigcup (Q_m^s; s \in \{1, 2\}^n)$$

und jede der Mengen Q_m^s ist ein abgeschlossener Quader mit

$$\text{diam}(Q_m^s) = \left(\sum_{\nu=1}^n \text{Länge}(I_\nu^{s_\nu})^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \text{diam}(Q_m) = \frac{1}{2^{m+1}} \text{diam}(Q).$$

Da Q nicht durch endlich viele der Mengen U_i ($i \in I$) überdeckt werden kann, gilt dasselbe für mindestens einen der Quader Q_m^s ($s \in \{1, 2\}^n$). Wähle ein solches s und setze $Q_{m+1} = Q_m^s$. Damit ist die rekursive Definition abgeschlossen.

Nach dem Schachtelungsprinzip (Satz 2.6) gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x\} = \bigcap_{k \geq 0} Q_k.$$

Wegen $x \in Q$ gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $\epsilon > 0$ mit $x \in B_\epsilon(x) \subset U_{i_0}$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(Q_{k_0}) < \epsilon$. Dann ist aber

$$x \in Q_{k_0} \subset B_\epsilon(x) \subset U_{i_0}$$

im Widerspruch zur Wahl der Quader Q_k . Also war die Annahme falsch, und die Kompaktheit von Q ist gezeigt. $\square$

Lemma 3.5. (a) Ist $K \subset X$ kompakt und ist $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \subset K$, so ist A kompakt.

(b) Ist $K \subset X$ kompakt, so ist $K \subset X$ abgeschlossen.

Beweis. (a) Seien K und A wie in Teil (a) beschrieben. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so ist $K \subset (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$. Da K kompakt ist und da auch die Menge $X \setminus A$ offen ist, gibt es $i_1, \dots, i_r \in I$ mit $K \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$. Dann ist aber $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und sei $a \in X \setminus K$. Nach Satz 1.12 gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ offene Umgebungen U_x von x und V_x von a mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Da K kompakt ist, gibt es endliche viele $x_1, \dots, x_r \in K$ mit $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$. Dann ist $V = \bigcap_{i=1}^r V_{x_i}$ eine offene Umgebung von a mit $V \subset X \setminus K$. Also enthält $X \setminus K$ zusammen mit jedem Punkt a noch eine ganze offene Umgebung von a . Damit ist die Offenheit von $X \setminus K$ gezeigt. $\square$

Definition 3.6. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, falls

$$\sup\{\|x\|; x \in A\} < \infty$$

ist. Eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ gibt der *Satz von Heine-Borel*.

Satz 3.7 (Satz von Heine-Borel). *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Nach Lemma 3.5 ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Da $K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k(0)$ eine offene Überdeckung von K bildet, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset B_{k_0}(0)$. Also ist K auch beschränkt.

Sei umgekehrt $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist

$$c = \sup_{x \in K} \|x\| < \infty$$

und K ist enthalten in dem abgeschlossenen Quader $Q = [-c, c] \times \dots \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^n$. Da Q nach Satz 3.4 kompakt ist und $K \subset \mathbb{R}^n$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt mit Teil (a) von Lemma 3.5, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist. $\square$

Man kann zeigen, dass in jedem unendlich dimensional normierten Raum abgeschlossene, beschränkte Mengen existieren, die nicht kompakt sind. Dies beweist man etwa in der Funktionalanalysis.

Satz 3.8. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $K \subset X$ kompakt, so hat jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Limes in K .*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt und sei $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in K . Hätte $(x_k)_{k \geq 0}$ keine konvergente Teilfolge mit Limes in K , so gäbe es für jeden Punkt $x \in K$ eine offene Umgebung U_x von x so, dass die Menge

$$\{k \in \mathbb{N}; x_k \in U_x\}$$

endlich ist. Denn sonst könnte man rekursiv eine Teilfolge von (x_k) mit Limes $x \in K$ definieren. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in K$ mit $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$. Dann wäre aber die Menge $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{N}; x_k \in K\}$ endlich. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung.

Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung der Implikation aus Satz 3.8 gilt. Im $\mathbb{R}^n$ ist dies mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel sehr einfach. Für beliebige metrische Räume beweist man die Umkehrung in der Topologie oder Funktionalanalysis.

Korollar 3.9 (Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^n$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $r = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\overline{B}_r(0)$. Da diese Menge nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist, hat $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach Satz 3.8 eine konvergente Teilfolge mit Limes in $\overline{B}_r(0)$. $\square$

Genau wie der Satz von Heine-Borel, der im obigen Beweis benutzt wurde, gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß in keinem unendlich dimensional normierten Raum.

Der Satz über die Beschränktheit stetiger Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen, endlichen Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Spezialfall des nächsten Ergebnisses.

Satz 3.10. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Für jede kompakte Menge $K \subset X$ ist $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach Satz 2.23 sind alle Urbilder $f^{-1}(V_i) \subset X$ ($i \in I$) offen. Da die Vereinigung dieser Mengen K enthält, gibt es $i_1, \dots, i_r \in I$ mit

$$K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_r}).$$

Dann ist $f(K) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r}$. Also enthält jede offene Überdeckung von $f(K)$ eine endliche Teilüberdeckung, und $f(K)$ ist definitionsgemäß kompakt. $\square$

Reellwertige stetige Abbildungen auf einer kompakten Menge nehmen ihr Supremum und Infimum an.

Korollar 3.11. *Sei $K \subset X$ kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es gibt Punkte $a, b \in K$ mit*

$$f(a) = \min f(K), \quad f(b) = \max f(K).$$

Beweis. Versieht man K mit der Relativmetrik $d_K = d|_{K \times K}$ (siehe Beispiel 1.2(c)), so wird $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung auf dem metrischen Raum (K, d_K) . Es ist sehr einfach zu sehen, dass die Kompaktheit von $K \subset X$ als Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) äquivalent zur Kompaktheit von K als Teilmenge des metrischen Raumes (K, d_K) ist. Also folgt mit Satz 3.10, dass $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Nach Korollar 3.7 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Da man das Supremum und Infimum einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ immer als Grenzwerte geeigneter Folgen aus M darstellen kann, gibt es Folgen $(y_k)_{k \geq 0}, (z_k)_{k \geq 0}$ in $f(K)$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \inf f(K), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \sup f(K).$$

Da $f(K) \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz 2.3, dass $a, b \in K$ existieren mit $f(a) = \inf f(K)$ und $f(b) = \sup f(K)$. $\square$

In der Analysis I zeigt man, dass jede stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Auch für diesen Satz ist die Kompaktheit des Definitionsbereiches die entscheidende Eigenschaft.

Definition 3.12. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$.

Satz 3.13. *Seien X, Y metrische Räume und sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f : K \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig (Hierbei sei K mit der Relativmetrik von X versehen).*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so würde es ein $\epsilon > 0$ geben so, dass für jedes $\delta > 0$ Elemente $x, y \in K$ existieren würden mit $d(x, y) < \delta$, aber $d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$. Insbesondere könnte man Folgen $(x_k)_{k \geq 1}$ $(y_k)_{k \geq 1}$ in K wählen mit $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$ und $d(f(x_k), f(y_k)) \geq \epsilon$ für alle $k \geq 1$. Nach Satz 3.8 hätte die Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ mit Limes $x \in K$. Wegen

$$d(x, y_{k_n}) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, y_{k_n}) \xrightarrow{n} 0$$

konvergiert auch die Folge $(y_{k_n})_{n \geq 1}$ gegen x . Aus der Stetigkeit von f in x folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n})$. Dies ist nicht möglich, da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \epsilon \leq d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \leq d(f(x_{k_n}), f(x)) + d(f(x), f(y_{k_n}))$$

gilt und die rechte Seite als Folge in n gegen 0 konvergiert. Also war unsere Annahme falsch und die gleichmäßige Stetigkeit von f ist gezeigt. □

4 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt), das mindestens einen Punkt enthält.

Definition 4.1. (a) Unter einer *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die als Definitionsbereich ein Intervall I wie oben besitzt.

(b) Eine Kurve $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* (*stetig differenzierbar*), falls alle Koordinatenfunktionen $f_\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (stetig differenzierbar) sind.

Beispiele 4.2. (a) Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = a + tv$$

beschreibt eine *Gerade* im $\mathbb{R}^n$ durch den Punkt a in Richtung v .

(b) Sei $r > 0$. Es gilt (Korollar 13.11 in [EAI])

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\| = r\} = \{(r \cos t, r \sin t); t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dies ist die Bildmenge der Kurve $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

(c) Seien $r > 0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$$

beschreibt eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ um die x_3 -Achse.

(d) Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph von φ die Bildmenge der Kurve

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (t, \varphi(t)).$$

Definition 4.3. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und sei $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Man nennt x einen *Doppelpunkt* der Kurve f , wenn es $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ und $f(t_1) = x = f(t_2)$ gibt.

(b) Ist f differenzierbar und $t \in I$, so nennt man

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t))$$

den *Tangentialvektor* von f zum Parameterwert t und

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \text{ (falls } f'(t) \neq 0 \text{ ist)}$$

den *Tangenten-Einheitsvektor* von f zum Parameterwert t .

(c) Sei f stetig differenzierbar und $t_0 \in I$. Dann heißt f *regulär*, wenn $f'(t) \neq 0$ ist für alle $t \in I$. Man nennt t_0 singulären Parameterwert, falls $f'(t_0) = 0$ ist.

Beispiele 4.4. (a) Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und ist $f(t_1) = x = f(t_2)$ mit $t_1 \neq t_2$, so kann natürlich $f'(t_1) \neq f'(t_2)$ gelten. So ist etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ stetig differenzierbar mit $f(1) = (0, 0) = f(-1)$ und wegen $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$ ist $f'(1) = (2, 2) \neq (-2, 2) = f'(-1)$.

(b) (*Neilsche Parabel*) Die stetig differenzierbare Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (t^2, t^3)$$

hat $t = 0$ als einzigen singulären Parameterwert, denn $f'(t) = (2t, 3t^2)$. Man prüft leicht nach, dass $f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ und } y = \pm x^{\frac{3}{2}}\}$.

Definition 4.5. Seien $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven und seien $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$ mit $f(t_1) = g(t_2)$. Die eindeutige Zahl (Satz 13.13 in [EAI]) $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \theta = \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \|g'(t_2)\|}$$

heißt der *Schnittwinkel* zwischen f und g bei den Parametern t_1 und t_2 .

In Definition 4.5 bezeichnet

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Nach Beispiel 1.5(a) gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung})$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$). Für jede Teilung $T = (t_i)_{i=0}^k$ von $[a, b]$, das heißt Punkte t_i mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, nennen wir

$$L(f, T) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

die *Länge* des durch die Folge $(f(t_i))_{i=0}^k$ definierten Polygonzuges.

Definition 4.6. Eine Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, falls es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt so, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|L - L(f, T)| < \epsilon$ für jede Teilung T von $[a, b]$ mit Feinheit $\omega(T) < \delta$. In diesem Fall heißt L die *Länge* oder *Bogenlänge* von f (geschrieben $L(f)$). Hierbei ist die Feinheit oder Spurweite einer Teilung $T = (t_i)_{i=0}^k$ von $[a, b]$ definiert durch $\omega(T) = \max_{i=1, \dots, k} (t_i - t_{i-1})$ (Definition 16.10 in [EAI]).

Lemma 4.7. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Seien $S = (s_i)_{i=0}^k$ und $T = (t_j)_{j=0}^m$ Teilungen von $[a, b]$. Ist S feiner als T (das heißt $t_j = s_{i_j}$ für geeignete $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_m = k$), so ist

$$L(f, T) \leq L(f, S).$$

Beweis. Die Behauptung folgt als Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} L(f, T) &= \sum_{j=1}^m \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \left\| \sum_{\nu=i_{j-1}+1}^{i_j} f(s_\nu) - f(s_{\nu-1}) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=i_{j-1}+1}^{i_j} \|f(s_\nu) - f(s_{\nu-1})\| = L(f, S). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 4.8. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$). Dann ist f rektifizierbar genau dann, wenn das Supremum

$$s = \sup\{L(f, T); T \text{ Teilung von } [a, b]\}$$

endlich ist. In diesem Fall ist $L(f) = s$.

Beweis. Sei f rektifizierbar. Sei $\epsilon > 0$ und T eine Teilung von $[a, b]$. Zu ϵ wähle man ein $\delta > 0$ wie in Definition 4.6. Dann gibt es eine Teilung S , die feiner ist als T , mit $\omega(S) < \delta$. Mit Lemma 4.7 folgt, dass

$$L(f, T) \leq L(f, S) \in]L(f) - \epsilon, L(f) + \epsilon[.$$

Da T eine beliebige Teilung von $[a, b]$ ist, können wir schließen, dass

$$L(f) + \epsilon \geq s \geq L(f, S) > L(f) - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt hieraus, dass $s = L(f)$ ist.

Sei umgekehrt das Supremum $s < \infty$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Teilung $S = (s_j)_{j=0}^m$ mit $L(f, S) > s - \frac{\epsilon}{2}$. Da f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < \min_{j=1, \dots, m} (s_j - s_{j-1})$ so, dass

$$\|f(t) - f(s)\| < \epsilon/4m$$

ist für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$. Sei $T = (t_i)_{i=0}^k$ eine beliebige Teilung von $[a, b]$ mit $\omega(T) < \delta$ und sei

$$I = \{i \in \{1, \dots, k\};]t_{i-1}, t_i[\cap \{s_0, \dots, s_m\} \neq \emptyset\}.$$

Dann gibt es zu jedem $i \in I$ genau einen Index $j_i \in \{0, \dots, m\}$ mit $s_{j_i} \in]t_{i-1}, t_i[$. Mit Lemma 4.7 erhalten wir

$$L(f, S) \leq \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \notin I}} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \sum_{i \in I} (\|f(t_i) - f(s_{j_i})\| + \|f(s_{j_i}) - f(t_{i-1})\|).$$

Die Summanden in der zweiten Summe schätzen wir ab nach oben gegen

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + 2\|f(s_{j_i}) - f(t_{i-1})\|$$

und erhalten

$$L(f, S) \leq L(f, T) + 2(m-1)(\epsilon/4m) < L(f, T) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Insgesamt folgt, dass

$$s \geq L(f, T) \geq L(f, S) - \frac{\epsilon}{2} > s - \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass f rektifizierbar ist und dass $L(f) = s$ ist. $\square$

Das in Satz 4.8 gebildete Supremum s nennt man auch die *totale Variation* der Funktion f . Für stetig differenzierbare Kurven lässt sich die Länge als Riemann-Integral der Funktion $\|f'\|$ berechnen.

Satz 4.9. *Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar mit*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und sei $\epsilon > 0$. Da die Funktionen $f'_1, \dots, f'_n$ gleichmäßig stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f'_\nu(t) - f'_\nu(s)| < \epsilon/(\sqrt{n}(b-a))$$

für $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$ und $\nu = 1, \dots, n$. Sei $T = (t_i)_{i=0}^k$ eine Teilung von $[a, b]$ mit $\omega(T) < \delta$ und sei $i \in \{1, \dots, k\}$. Es genügt zu zeigen, dass die Zahl

$$\Delta_i = \left| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt \right|$$

kleiner als $(\epsilon/b-a)(t_i - t_{i-1})$ ist. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4 in [EAI]) angewendet auf die Funktionen $f_\nu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ gibt es Zahlen $\tau_1, \dots, \tau_n \in]t_{i-1}, t_i[$ mit

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) (f'_\nu(\tau_\nu))_{\nu=1}^n.$$

Da die Funktion $\|f'\|$ stetig ist (Beispiel 2.13(b)), erlaubt es der 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 16.14 in [EAI]), eine Zahl $\tau \in [t_{i-1}, t_i]$ zu wählen mit

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt = \|f'(\tau)\| (t_i - t_{i-1}).$$

Mit Bemerkung 1.6 und der Dreiecksungleichung nach unten folgt die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \left| \| (f'_\nu(\tau_\nu))_{\nu=1}^n \| - \| f'(\tau) \| \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \| (f'_\nu(\tau_\nu) - f'_\nu(\tau))_{\nu=1}^n \| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sqrt{n} \max_{\nu=1, \dots, n} |f'_\nu(\tau_\nu) - f'_\nu(\tau)| (t_i - t_{i-1}) \\
&< (\epsilon/(b-a))(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Summieren über $i = 1, \dots, k$ liefert, dass $|L(f, T) - \int_a^b \|f'\| dt| < \epsilon$ ist. Da T eine beliebige Teilung mit $\omega(T) < \delta$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiele 4.10. (a) Seien $T > 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Die Länge der Schraubenlinie

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_0^T \|f'(t)\| dt = \int_0^T \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2 + c^2} dt \\
&= \int_0^T \sqrt{r^2 + c^2} dt = T \sqrt{r^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

(b) (*Zykloide*) Wir beschreiben die Kurve im $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, die ein fester Punkt P auf einem Rad mit Radius $r = 1$ beim Abrollen auf der x -Achse beschreibt. Sei dazu

$$M = (0, 1)$$

der Mittelpunkt des Rades zu Beginn und P der Punkt auf dem Rad, der zu Beginn die x -Achse berührt. Nachdem das Rad sich um den Winkel t gedreht hat, habe der Punkt P die Koordinaten $P(t) = (x(t), y(t))$. Dann gilt (§ 13 in [EAI])

$$\begin{aligned}
x(t) &= t - \cos(t - \frac{\pi}{2}) = t - \sin t \\
y(t) &= 1 + \sin(t - \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos t.
\end{aligned}$$

Die Kurve $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist stetig differenzierbar mit

$$L(P|_{[0, 2\pi]}) = \int_0^{2\pi} \|P'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt.$$

Wegen $2 - 2 \cos t = 2(1 - \cos(2\frac{t}{2})) = 2(1 - \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}) = 4 \sin^2(\frac{t}{2})$ folgt

$$L(P|_{[0, 2\pi]}) = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8.$$

Definition 4.11 (*Parametertransformationen*). Seien $[a, b]$ und $[\alpha, \beta]$ abgeschlossene Intervalle endlicher positiver Länge in $\mathbb{R}$.

- (a) Eine stetige bijektive Abbildung $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ nennt man auch *Parametertransformation*.
- (b) Eine Abbildung wie in (a) heißt *C^1 -Parametertransformation*, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Bemerkung 4.12. (a) Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation, so ist φ^{-1} stetig (Sätze 11.2 und 11.4 in [EAI]).

(b) Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation, so ist φ eine C^1 -Parametertransformation genau dann, wenn $\varphi'(t) \neq 0$ ist für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus der Kettenregel

$$1 = (\varphi \circ \varphi^{-1})'(t) = \varphi'(\varphi^{-1}(t)) (\varphi^{-1})'(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Die umgekehrte Implikation folgt aus dem Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen (Satz 14.12 in [EAI]).

(c) Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation, so ist (Satz 11.2 in [EAI]) φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Im ersten Fall nennt man φ *orientierungstreu*, im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*. Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation, so ist (Satz 15.6 in [EAI]) φ orientierungstreu genau dann, wenn $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist, orientierungsumkehrend genau dann, wenn $\varphi'(t) < 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist. Wir definieren das *Vorzeichen* der Parametertransformation φ durch

$$\epsilon(\varphi) = 1, \text{ falls } \varphi \text{ orientierungstreu ist,}$$

$$\epsilon(\varphi) = -1, \text{ falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.}$$

(d) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$.

(i) Die Tangentialvektoren

$$g'(\tau) = \varphi'(\tau) f'(\varphi(\tau))$$

von g in τ und f in $\varphi(\tau)$ unterscheiden sich um die Zahl $\varphi'(\tau) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Im Falle $g'(\tau) \neq 0$ (äquivalent $f'(\varphi(\tau)) \neq 0$) gilt

$$\frac{g'(\tau)}{\|g'(\tau)\|} = \frac{\varphi'(\tau)}{|\varphi'(\tau)|} \frac{f'(\varphi(\tau))}{\|f'(\varphi(\tau))\|} = \epsilon(\varphi) \frac{f'(\varphi(\tau))}{\|f'(\varphi(\tau))\|}.$$

- (ii) Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve ändert sich durch Umparametrisieren mit einer C^1 -Parametertransformation nicht

$$\begin{aligned} L(g) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|g'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|f'(\varphi(\tau))\| \epsilon(\varphi) \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \epsilon(\varphi) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L(f). \end{aligned}$$

Dabei haben wir Teil (c) benutzt und die Substitutionsregel (Satz 17.10 in [EAI]).

- (iii) Seien $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2$) reguläre Kurven, $t_i \in [a_i, b_i]$ Parameter mit $f_1(t_1) = f_2(t_2)$ und $\varphi_i : [\alpha_i, \beta_i] \rightarrow [a_i, b_i]$ ($i = 1, 2$) C^1 -Parametertransformationen. Setze $\tau_i = \varphi_i^{-1}(t_i)$ und

$$g_i = f_i \circ \varphi_i : [\alpha_i, \beta_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

für $i = 1, 2$. Dann ist $g_1(\tau_1) = g_2(\tau_2)$ und für die Schnittwinkel θ von f_1, f_2 in t_1, t_2 und θ' von g_1, g_2 in τ_1, τ_2 gilt nach (i)

$$\cos \theta' = \frac{\langle g'(\tau_1), g'(\tau_2) \rangle}{\|g'(\tau_1)\| \|g'(\tau_2)\|} = \epsilon(\varphi_1) \epsilon(\varphi_2) \frac{\langle f'(t_1), f'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \|f'(t_2)\|} = \epsilon(\varphi_1) \epsilon(\varphi_2) \cos \theta.$$

Also ist $\theta = \theta'$, falls φ_1 und φ_2 beide orientierungstreu oder orientierungsumkehrend sind, und $\theta' = \theta - \pi$ sonst.

5 Partielle Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion. Man nennt die Menge

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

den *Graphen* von f . Die Mengen

$$N_f(c) = \{x \in U; f(x) = c\} \quad (c \in \mathbb{R})$$

heißen die *Niveaumengen* von f .

Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den i -ten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$ ein Punkt in U . Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x *partiell differenzierbar bezüglich der i -ten Koordinate*, falls der Limes

$$D_i f(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. Man nennt $D_i f(x)$ die i -te partielle Ableitung von f in x . Statt $D_i f(x)$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $\partial_i f(x)$.

Bemerkung 5.2. In der Situation von Definition 5.1 gilt:

- (a) Die Menge $\{h \in \mathbb{R}; x + h e_i \in U\}$ ist eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$ (Satz 2.23).
- (b) Die Funktion f ist partiell differenzierbar in x bezüglich der i -ten Koordinate genau dann, wenn die Funktion $f_i : \{t \in \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

differenzierbar in x_i ist (vgl. Bemerkung 14.2 in [EAI]). In diesem Fall gilt

$$f'_i(x_i) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = D_i f(x).$$

- (c) Teil (b) impliziert, dass für die i -ten partiellen Ableitungen dieselben Rechenregeln (Summen-, Produkt-, Quotientenregel) gelten wie für Ableitungen von Funktionen einer reellen Variablen (Satz 14.8 in [EAI]).

Definition 5.3. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f

- (a) *partiell differenzierbar*, wenn $D_i f(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ für alle $i = 1, \dots, n$ existiert,
- (b) *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich die Funktionen

$$D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto D_i f(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

stetig sind.

Statt $D_i f$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder $\partial_i f$.

Beispiele 5.4. (a) Die Funktion $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ist stetig und $r|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ist partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r(x)} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Aus Beispiel 2.13 (b) folgt die Stetigkeit von r . Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Da die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

differenzierbar ist, ist nach der Kettenregel (Satz 14.10 in [EAI]) auch die Funktion

$$r_i : \{t \in \mathbb{R}; x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 > 0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2}$$

differenzierbar in $t = x_i$ mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = r'_i(x_i) = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{r(x)} = \frac{x_i}{r(x)}.$$

(b) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion

$$f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(r(x)) = f(\|x\|)$$

ist partiell differenzierbar nach der 1-dimensionalen Kettenregel mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ r)}{\partial x_i}(x) &= (f \circ r)'_i(x_i) = (f \circ r_i)'(x_i) = f'(r_i(x_i))r'_i(x_i) \\ &= f'(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = f'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)} = f'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Hierbei haben wir das Ergebnis aus Teil (a) benutzt.

(c) Partiiell differenzierbare Funktionen brauchen nicht stetig zu sein. Sei etwa $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{\|x\|^{2n}} \text{ für } x \neq 0, \quad F(0) = 0.$$

Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist F partiell differenzierbar nach (b) und der Produktregel und für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial (x_1 \cdots x_n)}{\partial x_i} \frac{1}{r(x)^{2n}} + (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r(x)^{2n}} \right) \\ &= \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n}{r(x)^{2n}} - 2n \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_i^2 x_{i+1} \cdots x_n}{r(x)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Die Funktion F ist auch in 0 partiell differenzierbar mit

$$\frac{F(0 + h e_i) - F(0)}{h} = \frac{0}{h} \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Aber F ist nicht stetig in $x = 0$, denn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F\left(\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left(n \cdot \frac{1}{k^2}\right)^n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \infty.$$

Wir werden später sehen, dass aus der stetigen partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion die Stetigkeit der Funktion folgt.

Definition 5.5. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Für $x \in U$ nennt man den Zeilenvektor

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

den *Gradienten* von f in x .

Beispiele 5.6. (a) Für $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\|$ ist $\text{grad } r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Beispiel 5.4(a)).

(b) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(\|x\|)$. Dann ist $\text{grad } F(x) = f'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann ist $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } (fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g,$$

denn aus der Produktregel folgt für $i = 1, \dots, n$ auf U

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Statt $\text{grad } f$ benutzt man oft auch die Schreibweise ∇f (gelesen: Nabla f).

Definition 5.7 (Vektorfelder). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Ein *Vektorfeld* auf U ist eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(b) Ein Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (*stetig*) *partiell differenzierbar*, falls alle Koordinatenfunktionen $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) partiell differenzierbar sind. In diesem Fall nennt man

$$\text{div } v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

die *Divergenz des Vektorfeldes* v .

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Lemma 5.8. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Dann ist auch $fv : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar mit

$$\text{div}(fv) = \langle \text{grad } f, v \rangle + f \text{div } v.$$

Beweis. Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$. Für $1 \leq i \leq n$ ist fv_i partiell differenzierbar mit $\frac{\partial}{\partial x_i}(fv_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}v_i + f\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Durch Aufsummieren erhält man

$$\operatorname{div}(fv) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fv_i)}{\partial x_i} = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \operatorname{div} v. \quad \square$$

Beispiel 5.9. Das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

ist nach Beispiel 5.6(b) und Lemma 5.8 partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) &= \left\langle \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\|x\|} \right), x \right\rangle + \frac{1}{\|x\|} \operatorname{div}(x) \\ &= \left\langle -\frac{1}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle + \frac{n}{\|x\|} = \frac{n-1}{\|x\|} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}^*$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir $D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f$ für die iterierte partielle Ableitung

$$D_{i_k}(\dots(D_{i_2}(D_{i_1}f))\dots),$$

falls diese existiert, also falls die Funktionen f nach x_{i_1} , $D_{i_1}f$ nach x_{i_2} , $D_{i_2}(D_{i_1}f)$ nach x_{i_3} , ..., $D_{i_{k-1}}(\dots(D_{i_2}(D_{i_1}f))\dots)$ nach x_{i_k} partiell differenzierbar sind. Bei festem $k \in \mathbb{N}^*$ heißen die Funktionen

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f \quad (i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\})$$

die partiellen Ableitungen der Ordnung k von f . Im Allgemeinen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen wichtig.

Beispiel 5.10. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für } (x_1, x_2) \neq 0, \quad f(0, 0) = 0$$

ist nach den Beispielen 5.4(b) und 5.6(c) auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar. Mit $p(x) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3$ folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) \frac{1}{\|x\|^2} - 2 p(x) \frac{x_i}{\|x\|^4} \quad (i = 1, 2).$$

Im Punkt $x = 0$ existieren die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0, x)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0).$$

Da für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{(D_1 f)(x, 0)}{x} &= 0, & \frac{(D_1 f)(0, x)}{x} &= -\frac{x^3}{x^3} = -1, \\ \frac{(D_2 f)(x, 0)}{x} &= \frac{x^3}{x^3} = 1, & \frac{(D_2 f)(0, x)}{x} &= 0, \end{aligned}$$

existieren die partiellen Ableitungen 2. Ordnung in $x = 0$

$$D_2 D_1 f(0, 0) = -1 \neq 1 = D_1 D_2 f(0, 0),$$

aber sind verschieden.

Satz 5.11 (Satz von Schwarz). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq i, j \leq n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass die partiellen Ableitungen $D_j D_i f$, $D_i D_j f$ auf U existieren und in einem Punkt $a \in U$ stetig sind. Dann ist $D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a)$.*

Beweis. Für $i = j$ ist nichts zu zeigen. Sei also $i \neq j$. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty < \delta\} \subset U$$

und setze $V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; \|(s, t)\|_\infty < \delta\}$. Wir definieren $f_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_{ij}(s, t) = f(a + se_i + te_j) - f(a + se_i) - f(a + te_j) + f(a).$$

Bildet man entsprechend f_{ji} , indem man die Rollen von i und j vertauscht, so gilt

$$f_{ij}(s, t) = f_{ji}(t, s)$$

für $(s, t) \in V$. Wir fixieren einen Punkt $(s, t) \in V$ mit $s \neq 0 \neq t$. Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 15.4 in [EAI]) angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$g : [-|s|, |s|] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(u) = f(a + ue_i + te_j) - f(a + ue_i)$$

liefert ein $\xi = \xi_{s,t} \in]-|s|, |s|[$ mit

$$f_{ij}(s, t) = g(s) - g(0) = g'(\xi)s = s(D_i f(a + \xi e_i + te_j) - D_i f(a + \xi e_i)).$$

Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$h = [-|t|, |t|] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(v) = D_i f(a + \xi e_i + ve_j)$$

liefert ein $\eta = \eta_{s,t} \in]-|t|, |t|[$ mit

$$f_{ij}(s, t) = s(h(t) - h(0)) = sth'(\eta) = stD_j D_i f(a + \xi e_i + \eta e_j).$$

Da für jede Folge von Paaren $(s_n, t_n) \in V$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ und $s_n \neq 0 \neq t_n$ für alle n auch die zugehörigen Folgen $(\xi_{s_n, t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_{s_n, t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $D_j D_i f$ im Punkt a , dass

$$D_j D_i f(a) = \lim_{(s,t)} D_j D_i f(a + \xi_{s,t} e_i + \eta_{s,t} e_j) = \lim_{(s,t)} \frac{f_{ij}(s, t)}{st} = \lim_{(s,t)} \frac{f_{ji}(t, s)}{ts} = D_i D_j f(a),$$

wobei der Limes für $V \ni (s, t) \rightarrow 0$ mit $s \neq 0 \neq t$ gebildet wird. Dabei folgt die letzte Identität, indem man im obigen Beweis überall die Rollen von i und j und s und t vertauscht. $\square$

Definition 5.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}^*$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal *partiell differenzierbar* (bzw. *stetig partiell differenzierbar*), falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren (bzw. existieren und stetig sind). Wir schreiben

$$\begin{aligned} C^k(U) &= \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}, \\ C^k(U, \mathbb{R}^m) &= \{f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m; f_i \in C^k(U) \text{ für } i = 1, \dots, m\}, \\ C^0(U, \mathbb{R}^m) &= C(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m; f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Korollar 5.13. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ mit $2 \leq r \leq k$ und jede Permutation $\pi : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f.$$

Beweis. Jede Permutation $\pi : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ lässt sich darstellen als Komposition endlich vieler benachbarter Transpositionen. □

Man schreibt auch

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} \dots D_{i_1} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = D_i D_i f, \dots$$

Beispiel 5.14. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\text{rot } v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die *Rotation des Vektorfeldes* v .

Korollar 5.15. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt $\text{rot grad } f = 0$.

Beweis. Da f eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, folgt mit dem Satz von Schwarz (Satz 5.11), dass

$$\text{rot grad } f = (\partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f, \partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f, \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f) = 0. \quad \square$$

Definition 5.16. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$.

(a) Man definiert

$$\Delta f = \text{div grad } f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f \quad (\text{gelesen: Laplace } f).$$

(b) Die Gleichung

$$\Delta f = 0 \quad (f \in C^2(U))$$

heißt *Potentialgleichung*. Ihre Lösungen nennt man *harmonische Funktionen* auf U .

Beispiele 5.17. (a) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = f(\|x\|).$$

Dann ist $F \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit

$$\Delta F(x) = f''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} f'(\|x\|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Denn aus Beispiel 5.4(b) und der Produktregel folgt, dass die partiellen Ableitungen

$$(\partial_i F)(x) = f'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} \quad (1 \leq i \leq n)$$

stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind mit

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} F(x) = \operatorname{div} \left(f'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \right) \\ &= \left\langle \operatorname{grad} f'(\|x\|), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + f'(\|x\|) \operatorname{div} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \\ &= \left\langle f''(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + f'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \\ &= f''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} f'(\|x\|) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dabei haben wir nacheinander Lemma 5.8 sowie die Beispiele 5.6(b) und 5.9 benutzt.

Insbesondere sind die Funktionen

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log \|x\|$$

harmonisch.

(b) (*Schwingungsgleichung*) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion

$$F : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, t) = \frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|}$$

ist eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Lösung der *Schwingungsgleichung*

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F \equiv 0.$$

Da für festes $t \in \mathbb{R}$ die durch $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r) = \frac{\cos(r-ct)}{r}$ definierte Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist, folgt mit Teil (a)

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F \right) (x, t) = f''(\|x\|) + \frac{2}{\|x\|} f'(\|x\|)$$

für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Es ist

$$\begin{aligned}f'(r) &= \frac{-\sin(r-ct)}{r} - \frac{\cos(r-ct)}{r^2}, \\f''(r) &= \frac{-\cos(r-ct)}{r} + 2\frac{\sin(r-ct)}{r^2} + 2\frac{\cos(r-ct)}{r^3}\end{aligned}$$

und daher

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F\right)(x, t) = -\frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t) = c^2 \frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R})$$

folgt die Behauptung.

6 Totale Differenzierbarkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in U$ (Satz 14.6 in [EAI]) genau dann, wenn sie linear approximierbar ist in x_0 in dem Sinne, dass eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $h : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + h(x) \quad (x \in U \setminus \{x_0\}) \text{ und } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{h(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von $0 \in \mathbb{R}$, eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + c\xi + \varphi(\xi) \quad (\xi \in V) \text{ und } \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = 0.$$

Man gewinnt φ aus h , indem man $V = U - x_0$ setzt und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(\xi) = h(\xi + x_0)$ für $\xi \neq 0$ und $\varphi(0) = 0$. Die umgekehrte Implikation folgt ganz ähnlich.

Da die Abbildungen der Form

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto c\xi \quad (c \in \mathbb{R})$$

genau die $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind, stellt die folgende Definition eine direkte Verallgemeinerung des 1-dimensionalen Differenzierbarkeitsbegriffes auf den mehrdimensionalen Fall dar.

Definition 6.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $x \in U$ ein Punkt in U . Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* in x (oder *differenzierbar* in x), falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren mit

$$(i) \quad f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi) \text{ für } \xi \in V \text{ und}$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0.$$

Man beachte, dass in der obigen Situation die Menge V immer automatisch in $U - x = \{u - x; u \in U\}$ enthalten ist. Indem man $\varphi(\xi) = f(x + \xi) - f(x) - A\xi$ für $\xi \in (U - x) \cap V^c$ definiert, kann man immer erreichen, dass φ auf ganz $U - x$ definiert ist.

Bemerkung 6.2. Seien in der Situation von Definition 6.1 die Funktionen $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ gegeben durch ihre Koordinatenfunktionen. Ist $(a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, das heißt, gilt

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}e_i \quad (1 \leq j \leq n),$$

so ist die Gleichung (i) in Definition 6.1 äquivalent zur Gültigkeit der Gleichungen

$$f_i(x + \xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j + \varphi_i(\xi) \text{ für } \xi \in V \quad (1 \leq i \leq m).$$

Insbesondere folgt, dass eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann total differenzierbar in $x \in U$ ist, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$) total differenzierbar in x sind.

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\varphi(0) = 0$. Man schreibt

$$\varphi(\xi) = o(\|\xi\|) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

und schreibt abkürzend für die Gleichungen (i) und (ii) in Definition 6.1

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + o(\|\xi\|).$$

Beispiel 6.3. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist A in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, denn wegen

$$A(x + \xi) = Ax + A\xi \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^n)$$

gelten (i) und (ii) aus Definition 6.1 mit $V = \mathbb{R}^n$ und $\varphi \equiv 0$.

Wir haben in Beispiel 5.4(c) gesehen, dass man aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion nicht auf ihre Stetigkeit schließen kann. Als nächstes zeigen wir, dass total differenzierbare Funktionen partiell differenzierbar und stetig sind und dass die lineare Abbildung A in Gleichung (i) aus Definition 6.1 eindeutig bestimmt ist.

Satz 6.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$ ein Punkt in U . Es gelte

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

wie in Definition 6.1. Sei $(a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ die darstellende Matrix von A bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(i) f ist stetig in x ,

(ii) alle Koordinatenfunktionen f_i ($i = 1, \dots, m$) von f sind in x partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Insbesondere ist die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt.

Beweis. Da die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nach Lemma 2.20 stetig ist, folgt $\lim_{\xi \rightarrow 0} A\xi = A0 = 0$. Aus der Gültigkeit von Bedingung (ii) in Definition 6.1 folgt, dass $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \|\xi\| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$. Damit erhält man die Stetigkeit von f in x

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(x + \xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} (f(x) + A\xi + \varphi(\xi)) = f(x).$$

Für $i = 1, \dots, m$ und $\xi \in V$ gilt

$$f_i(x + \xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j + \varphi_i(\xi).$$

Insbesondere gilt für alle reellen Zahlen $h \neq 0$ mit genügend kleinem Absolutbetrag und für $j = 1, \dots, n$

$$\frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x)}{h} = a_{ij} + \frac{\varphi_i(h e_j)}{\|h e_j\|} \operatorname{sgn}(h) \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} a_{ij}.$$

Also ist jede Koordinatenfunktion f_i von f in jeder Koordinatenrichtung x_j partiell differenzierbar in x mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$. $\square$

Da die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in Definition 6.1 eindeutig bestimmt ist, macht es Sinn, diese lineare Abbildung als Ableitung von f im Punkt x zu interpretieren. In der Situation der Analysis I (das heißt $n = m = 1$) bedeutet dies, dass man statt der Zahl $f'(x)$ die lineare Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(x)t$$

als Ableitung von f in x betrachtet.

Definition 6.5. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung in x mit

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

wie in Definition 6.1.

(a) Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt das *Differential* (oder *totale Differential*) von f in x . Man schreibt

$$Df(x) \quad (\text{oder } f'(x)) = A$$

für das Differential von f in x .

(b) Die darstellende Matrix von A (bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$), das heißt die Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

heißt die *Jacobi-Matrix* oder *Funktionalmatrix* von f in x (geschrieben als $J_f(x)$).

Ist $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, so sind die Koeffizienten der darstellenden Matrix $(a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ von A die eindeutigen reellen Zahlen mit

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

In diesem Fall wirkt die lineare Abbildung A auf einen Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ wie die Matrixmultiplikation mit der darstellenden Matrix

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1}^m.$$

Oft identifiziert man die lineare Abbildung A mit ihrer darstellenden Matrix.

Nach Satz 6.4 impliziert die totale Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ihre partielle Differenzierbarkeit (das heißt, die partielle Differenzierbarkeit aller Koordinatenfunktionen). Die Umkehrung ist falsch, da die totale Differenzierbarkeit nach Satz 6.4 die Stetigkeit impliziert, die partielle Differenzierbarkeit aber nicht (Beispiel 5.4(c)).

Satz 6.6. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) stetig in x , so ist f total differenzierbar in x .*

Beweis. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Sei $\xi \in B_\delta(0)$ und sei

$$z^{(i)} = x + \sum_{\nu=1}^i \xi_\nu e_\nu \quad (i = 0, \dots, n).$$

Dann ist $z^{(0)} = x$, $z^{(n)} = x + \xi$ und $\|z^{(i)} - x\| \leq \|\xi\| < \delta$ für $i = 0, \dots, n$. Der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4 in [EAI]) angewendet auf die differenzierbaren Funktionen

$$g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(t) = f\left(z^{(i-1)} + t\xi_i e_i\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

liefert eine Zahl $\theta_i = \theta_i(\xi) \in (0, 1)$ so, dass

$$f\left(z^{(i)}\right) - f\left(z^{(i-1)}\right) = g_i(1) - g_i(0) = g'_i(\theta_i) = \xi_i D_i f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i\right).$$

Zur Berechnung der Ableitung benutze man die 1-dimensionale Kettenregel mit innerer Funktion $t \mapsto t\xi_i$.

Definiert man $y^{(i)} = z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(x + \xi) - f(x) &= f\left(z^{(n)}\right) - f\left(z^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^n \left(f\left(z^{(i)}\right) - f\left(z^{(i-1)}\right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i f\left(y^{(i)}\right) \xi_i = \sum_{i=1}^n D_i f(x) \xi_i + \varphi(\xi) \end{aligned}$$

mit $\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n (D_i f(y^{(i)}) - D_i f(x)) \xi_i$. Da die Funktionen $D_i f$ ($1 \leq i \leq n$) nach Voraussetzung stetig sind in x und da

$$y^{(i)} = (x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + \theta_i \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \xrightarrow{(\xi \rightarrow 0)} x$$

konvergiert, folgt

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|} \leq \sum_{i=1}^n \left| D_i f(y^{(i)}) - D_i f(x) \right| \frac{|\xi_i|}{\|\xi\|} \xrightarrow{(\xi \rightarrow 0)} 0.$$

Also ist f total differenzierbar in x . □

Korollar 6.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar (das heißt alle Koordinatenfunktionen $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ von f seien stetig partiell differenzierbar). Dann ist f total differenzierbar und insbesondere auch stetig in jedem Punkt $x \in U$.

Beweis. Satz 6.6 zeigt, dass alle Koordinatenfunktionen von f total differenzierbar in jedem $x \in U$ sind. Nach Bemerkung 6.2 ist f in jedem $x \in U$ total differenzierbar und nach Satz 6.4 auch stetig. $\square$

Formal gilt für die Differentiale von total differenzierbaren Abbildungen dieselbe Kettenregel wie für die Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen (siehe Satz 14.10 in [EAI]).

Satz 6.8 (Kettenregel). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $f(U) \subset V$. Ist f differenzierbar in x und ist g differenzierbar in $f(x)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in x , und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x),$$

das heißt das totale Differential von $g \circ f$ in x ist die Komposition der totalen Differentiale von g in $f(x)$ und f in x .

Beweis. Mit $A = f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $B = g'(f(x)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+u) &= f(x) + Au + \varphi(u) \text{ für } u \in U-x, \\ g(f(x)+v) &= g(f(x)) + Bv + \psi(v) \text{ für } v \in V-f(x) \end{aligned}$$

mit Funktionen $\varphi : U-x \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi : V-f(x) \rightarrow \mathbb{R}^k$, für die gilt

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{\|u\|} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\psi(v)}{\|v\|} = 0.$$

Für $u \in U-x$ folgt

$$\begin{aligned} g \circ f(x+u) &= g(f(x+u)) = g(f(x)) + B(Au + \varphi(u)) + \psi(Au + \varphi(u)) \\ &= (g \circ f)(x) + B \circ A(u) + \chi(u) \end{aligned}$$

mit $\chi(u) = B\varphi(u) + \psi(Au + \varphi(u))$. Also genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\chi(u)}{\|u\|} = 0.$$

Da nach Lemma 2.21

$$\left\| \frac{\chi(u)}{\|u\|} \right\| \leq \|B\| \left\| \frac{\varphi(u)}{\|u\|} \right\| + \left\| \frac{\psi(Au + \varphi(u))}{\|u\|} \right\|$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass

$$(*) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(Au + \varphi(u))}{\|u\|} = 0$$

ist. Dazu definieren wir $\psi_0(v) = \frac{\psi(v)}{\|v\|}$ für $v \in V - f(x)$ mit $v \neq 0$ und $\psi_0(0) = 0$. Für $u \in U - x$ mit hinreichend kleiner Norm $\|u\|$, ist $\|\frac{\varphi(u)}{\|u\|}\| < 1$ und damit

$$\|\psi(Au + \varphi(u))\| \leq (\|A\| + 1)\|u\| \|\psi_0(Au + \varphi(u))\|.$$

Indem man durch $\|u\|$ dividiert und benutzt, dass $\lim_{v \rightarrow 0} \psi_0(v) = 0$ ist, sieht man, dass Bedingung (*) erfüllt ist. Dies beendet den Beweis. $\square$

Da die darstellende Matrix einer Komposition linearer Abbildungen das Matrixprodukt der darstellenden Matrizen der linearen Abbildungen ist, gilt in der Situation von Satz 6.8

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) \quad (\text{Matrixprodukt}).$$

Korollar 6.9. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen mit $f(U) \subset V$. Dann ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

für $x \in U$ und $j = 1, \dots, n$ oder äquivalent

$$\text{grad } (g \circ f)(x) = (\text{grad } g(f(x))) J_f(x)$$

für alle $x \in U$.

Beweis. Nach der Bemerkung zu Satz 6.8 gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_n}(x) \right) &= \text{grad } (g \circ f)(x) = J_{g \circ f}(x) \\ &= J_g(f(x)) \cdot J_f(x) = \text{grad } g(f(x)) \cdot J_f(x) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(x)), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(x)) \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 6.10. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Ist $f \in C^k(U)$ mit $f(U) \subset V$ und ist $g \in C^k(V)$, so ist $g \circ f \in C^k(U)$.

Beweis. Mit der Produktregel und Induktion nach k folgt, dass für zwei Funktionen $u, v \in C^k(U)$ das Produkt $uv \in C^k(U)$ gehört und dass die partiellen Ableitungen von uv der Ordnung $\leq k$ endliche Summen von Produkten aus einer partiellen Ableitung von u und einer partiellen Ableitung von v jeweils der Ordnung $\leq k$ sind. Damit folgt die Behauptung von Korollar 6.10 durch Induktion nach k . Der Induktionsanfang $k = 1$ folgt direkt aus Korollar 6.9. Sei $k \geq 2$ und die Behauptung gezeigt für $k - 1$. Für f, g

wie in Korollar 6.10 und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ ist dann nach Korollar 6.9, der Induktionsvoraussetzung und der obigen Bemerkung über Produkte

$$D_{i_1}(g \circ f) = \sum_{i=1}^m (\partial_i g) \circ f \cdot (\partial_{i_1} f) \in C^{k-1}(U).$$

Also existiert $D_{i_k} \cdots D_{i_2}(D_{i_1}(g \circ f))$ und ist stetig. $\square$

Die partiellen Ableitungen sind Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen. Entsprechend kann man Ableitungen in Richtung beliebiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ bilden.

Definition 6.11 (*Richtungsableitungen*). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt (falls dieser Limes existiert)

$$D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}$$

die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v .

Für $v = e_i$ ($1 \leq i \leq n$) ist offensichtlich $D_{e_i} f(x) = D_i f(x)$.

Satz 6.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Für $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ ist

$$D_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = f'(x)(v).$$

Beweis. Nach der Kettenregel (Satz 6.9) ist die Funktion

$$W = \{t \in \mathbb{R}; x + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(x + tv)$$

differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} f(x + tv) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv) \frac{d(x_i + tv_i)}{dt} = \langle \text{grad } f(x + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i f'(x)(e_i) = f'(x)(v)$$

für alle $t \in W$. $\square$

Bemerkung 6.13. Ist $\text{grad } f(x) \neq 0$ in Satz 6.12, so gilt

$$D_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = \cos \theta \|\text{grad } f(x)\|,$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$ der Schnittwinkel zwischen v und $\text{grad } f(x)$ ist. Die Richtungsableitung in x wird maximal in Richtung $v = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sind $x, \xi \in \mathbb{R}$ mit $x, x + \xi \in I$, so folgt aus der Substitutionsregel mit der inneren Funktion $\varphi(t) = x + t\xi$ ($t \in [0, 1]$)

$$f(x + \xi) - f(x) = \int_{x=\varphi(0)}^{x+\xi=\varphi(1)} f'(u) du = \int_0^1 f'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \xi \int_0^1 f'(x + t\xi) dt.$$

Diese Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gilt auch mehrdimensional. Dabei ersetzen wir die Ableitung von f unter dem letzten Integral durch die Jacobi-Matrix von f . Die dabei auftretenden Integrale matrixwertiger stetiger Funktionen definiert man koeffizientenweise.

Definition 6.14. Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei

$$A : [a, b] \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R}), \quad t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$$

stetig. Dann definiert man

$$\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right) \in M(m \times n, \mathbb{R}).$$

Man beachte dabei, dass nach Bemerkung 2.22 alle Koeffizientenfunktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto a_{ij}(t)$ stetig sind.

Satz 6.15 (Mittelwertsatz). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$f(x + \xi) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi.$$

Beweis. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ stetig differenzierbar. Nach der Kettenregel (Korollar 6.9) sind die Funktionen

$$g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f_i(x + t\xi) \quad (1 \leq i \leq m)$$

stetig differenzierbar. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 17.7 in [EAI]) und der Kettenregel folgt, dass

$$\begin{aligned} f_i(x + \xi) - f_i(x) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + t\xi) \frac{d}{dt}(x_j + t\xi_j) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi_j \end{aligned}$$

gleich der i -ten Zeile des Produktes

$$\left(\int_0^1 \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x + t\xi) dt \right)_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}} (\xi_\nu)_{\nu=1}^n = \left(\int_0^1 J_f(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi$$

ist. □

Für Anwendungen des Mittelwertsatzes ist es nützlich, eine Verallgemeinerung der Standardabschätzung für Riemann-Integrale (Satz 16.13(b) in [EAI]) zur Verfügung zu haben.

Lemma 6.16. Für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A : [a, b] \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

und

$$\left\| \int_a^b A(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|A(t)\| dt,$$

wobei auch das erste Integral komponentenweise definiert ist.

Beweis. Für eine Teilung $T = (t_i)_{i=0}^r$ von $[a, b]$ und eine Zwischenfolge $Z = (z_i)_{i=1}^r$ von T definieren wir wie in der Analysis I (Definition 16.10 in [EAI]) die zugehörige Riemann-Summe der stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$S(f, T, Z) = \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1}) f(z_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $S(f, T, Z) = (S(f_j, T, Z))_{j=1}^n$. Sei $(T_k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Teilungen des Intervalls $[a, b]$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(T_k) = 0$ und $(Z_k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Zwischenfolgen Z_k von T_k . Nach Satz 16.11 in [EAI] und Lemma 2.2 gilt

$$\int_a^b f dt = \left(\int_a^b f_j dt \right)_{j=1}^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (S(f_j, T_k, Z_k))_{j=1}^n = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, T_k, Z_k).$$

Da die Normfunktion $\|\cdot\|$ stetig ist (Beispiel 2.13 (b)), folgt

$$\left\| \int_a^b f dt \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S(f, T_k, Z_k)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} S(\|f\|, T_k, Z_k) = \int_a^b \|f\| dt,$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm $\|\cdot\|$ und noch einmal Satz 16.11 aus [EAI] (diesesmal für die stetige Funktion $\|f\|$) benutzt haben.

Da auch Konvergenz in $M(m \times n, \mathbb{R})$ äquivalent zur koeffizientenweisen Konvergenz ist (Bemerkung 2.22), kann man die Integralabschätzung im matrixwertigen Fall ganz genauso beweisen. $\square$

Kombiniert man den Mittelwertsatz mit der obigen Integralabschätzung, so hält man die *Mittelwertabschätzung* der mehrdimensionalen Differentialrechnung.

Korollar 6.17 (Mittelwertabschätzung). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \|\xi\|$$

mit

$$M = \sup_{t \in [0,1]} \|J_f(x + t\xi)\| = \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x + t\xi)\| < \infty.$$

Beweis. Mit dem Mittelwertsatz (Satz 6.15) sowie Lemma 2.21 und Lemma 6.16 enthält man

$$\begin{aligned} \|f(x + \xi) - f(x)\| &= \left\| \left(\int_0^1 J_f(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi \right\| \leq \left\| \int_0^1 J_f(x + t\xi) dt \right\| \|\xi\| \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(x + t\xi)\| dt \|\xi\| \leq M \|\xi\|. \end{aligned}$$

Da $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ ist, ist die Funktion $[0, 1] \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$, $t \mapsto J_f(x + t\xi)$ nach Bemerkung 2.22 stetig. Die Stetigkeit bleibt erhalten, wenn man die Matrixnorm (Lemma 2.21) hinter diese Funktion schaltet. Also ist $M < \infty$. Da die Norm einer Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ definiert wurde als die Operatornorm des zugehörigen Multiplikationsoperators $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ (Lemma 2.21), folgt die Gleichheit der beiden Suprema. $\square$

7 Die Taylorsche Formel

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ werden wir im Folgenden die abkürzenden Schreibweisen

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!) \cdots (\alpha_n!), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

benutzen. Für $f \in C^{|\alpha|}(U)$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) definiert man

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

mit $D_i^{\alpha_i} = D_i \dots D_i$ α_i -mal angewendet.

Satz 7.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^k(U)$. Sind $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, so ist die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + t\xi)$ k -mal stetig differenzierbar und für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\xi) \xi^\alpha.$$

Beweis. Nach der Kettenregel (Korollar 6.10) ist $g \in C^k[0, 1]$. Man beachte, dass $\{t \in \mathbb{R}; x + t\xi \in U\} \subset \mathbb{R}$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen ist.

Im ersten Beweisschritt zeigen wir durch Induktion nach k , dass für alle $k \geq 1$ und $f \in C^k(U)$ die k -te Ableitung von g in jedem Punkt $t \in [0, 1]$ gegeben ist durch

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Für $k = 1$ folgt die behauptete Formel direkt aus Korollar 6.9

$$g^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^n D_i f(x + t\xi) \frac{d}{dt}(x_i + t\xi_i) = \sum_{i=1}^n D_i f(x + t\xi) \xi_i.$$

Ist die Behauptung gezeigt für $f \in C^{k-1}(U)$, $k \geq 2$, so folgt wieder mit der Kettenregel (Korollar 6.9) zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$g^{(k)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$$

für alle $t \in [0, 1]$.

Im zweiten Schritt zeigen wir mit einem kombinatorischen Argument, dass die gerade bewiesene Summendarstellung für $g^{(k)}(t)$ mit der im Satz behaupteten Darstellung übereinstimmt. Dazu bezeichnen wir für $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ und jedes $\nu = 1, \dots, n$ mit α_ν die Anzahl aller $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i_j = \nu$ und setzen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Offensichtlich ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Tupel mit $|\alpha| = k$, und der zum Indextupel $(i_1, \dots, i_k)$ gehörige Summand in der oben bewiesenen Formel für $g^{(k)}(t)$ hat die Form

$$D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x + t\xi) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} = D^\alpha f(x + t\xi) \xi^\alpha.$$

Man beachte dabei, dass es für $f \in C^k(U)$ nach dem Satz von Schwarz (Korollar 5.13) nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die partiellen Ableitungen gebildet werden. Bleibt noch zu zählen, wie viele Indextupel $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ zu gegebenem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$ existieren, in denen jede der Zahlen $i \in \{1, \dots, n\}$ genau α_i -mal vorkommt. Es gibt $\binom{k}{\alpha_1}$ Möglichkeiten, die α_1 Plätze für die Zahl 1 auszusuchen. Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es $\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}$ Möglichkeiten, die α_2 Plätze für die Zahl 2 auszusuchen und so weiter.

Auf diese Weise sieht man, dass es insgesamt

$$\begin{aligned} & \binom{k}{\alpha_1} \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \binom{k-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3} \dots \binom{k-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \\ &= \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \frac{(k-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(k-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!} \dots \frac{(k-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-2})!}{(\alpha_{n-1})!\alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!} \end{aligned}$$

Möglichkeiten gibt. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Als Anwendung von Satz 7.1 und des Satzes über die Taylorentwicklung von Funktionen einer reellen Variablen (Satz 20.1 in [EAI]) erhält man die Taylorsche Formel für Funktionen von n Veränderlichen.

Satz 7.2 (Taylorsche Formel). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Ist $f \in C^{k+1}(U)$, so gibt es ein $\theta \in]0, 1[$ mit*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

Beweis. Da durch $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + t\xi)$ eine Funktion in $C^{k+1}[0, 1]$ definiert wird, gibt es nach der 1-dimensionalen Taylorschen Formel (Satz 20.1 in [EAI]) ein $\theta \in]0, 1[$ mit

$$g(1) = \sum_{j=0}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} 1^j + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} 1^{k+1}.$$

Mit Satz 7.1 folgt, dass

$$f(x + \xi) = g(1) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=j}} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha f(x) \xi^\alpha + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k+1}} \frac{(k+1)!}{\alpha!} D^\alpha f(x + \theta\xi) \xi^\alpha.$$

Also gilt die im Satz behauptete Formel. $\square$

Die in Satz 7.2 hergeleitete Darstellung einer Funktion $f \in C^{k+1}(U)$ nennt man die *Taylorentwicklung von f in x mit Restglied der Ordnung $(k+1)$* . Zur approximativen Berechnung von f in der Nähe von x ist die folgende Restgliedabschätzung nützlich.

Korollar 7.3. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(U)$. Für die durch*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \varphi(\xi) \quad (\xi \in U - x)$$

definierte Funktion $\varphi : U - x \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} = 0.$$

Beweis. Für $k = 0$ folgt die Behauptung direkt aus der Stetigkeit von f . Sei also $k \geq 1$. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Für $\xi \in B_\delta(0)$ existiert nach Satz 7.2 ein $\theta = \theta_\xi \in]0, 1[$ mit

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

Also gilt für $\xi \neq 0$

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} \right| \leq \sum_{|\alpha| = k} \frac{|D^\alpha f(x + \theta\xi) - D^\alpha f(x)|}{\alpha!} \frac{|\xi_1|^{\alpha_1}}{\|\xi\|^{\alpha_1}} \cdots \frac{|\xi_n|^{\alpha_n}}{\|\xi\|^{\alpha_n}} \leq \sum_{|\alpha| = k} \frac{|D^\alpha f(x + \theta\xi) - D^\alpha f(x)|}{\alpha!} \xrightarrow{(\xi \rightarrow 0)} 0.$$

Benutzt haben wir, dass alle Ableitungen von f der Ordnung k noch stetig sind im Punkt x . $\square$

Abkürzend für die in Korollar 7.3 formulierte Eigenschaft von Funktionen $f \in C^k(U)$ schreibt man oft

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|^k) \quad (x \in U - x).$$

Die Funktionen

$$p_j(\xi) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha \quad (j = 0, \dots, k)$$

sind bei festem $x \in U$ *homogene Polynome vom Grade j* in ξ (das heißt Polynomfunktionen mit $p_j(t\xi) = t^j p_j(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$). Definitionsgemäß gilt

$$f(x + \xi) = \sum_{j=0}^k p_j(\xi) + o(\|\xi\|^k) \quad (x \in U - x).$$

Für $j = 0, 1, 2$ erhält man $p_0(\xi) \equiv f(x)$,

$$\begin{aligned} p_1(\xi) &= \sum_{i=1}^n D_i f(x) \xi_i = \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle, \\ p_2(\xi) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} D_i^2 f(x) \xi_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_i D_j f(x) \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n D_i^2 f(x) \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n D_i D_j f(x) \xi_i \xi_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_i D_j f(x) \xi_j \right) \xi_i \\ &= \frac{1}{2} \langle A \xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

mit $A = (D_i D_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Hierbei haben wir bei der Berechnung von $p_2(\xi)$ benutzt, dass man dem Satz von Schwarz (Satz 5.11) die partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer C^2 -Funktion unabhängig von der Reihenfolge sind, in der sie gebildet werden.

Definition 7.4 (*Hesse-Matrix*). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f \in C^2(U)$. Die Matrix

$$\text{Hess}f(x) = (D_i D_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

heißt die *Hesse-Matrix* von f in x .

Damit erhält Korollar 7.3 im Spezialfall $k = 2$ die folgende Gestalt.

Korollar 7.5. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f \in C^2(U)$. Dann gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}f(x) \xi, \xi \rangle + o(\|\xi\|^2)$$

für $\xi \in U - x$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar 7.3 mit $k = 2$ und den anschließenden Bemerkungen. $\square$

Wie in der Analysis I kann man auch die Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher benutzen, um lokale Extrema von reellwertigen Funktionen zu bestimmen.

Definition 7.6 (*Lokale Extrema*). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Definitionsgemäß besitzt die Funktion f ein *lokales Maximum* (*Minimum*) in x_0 , falls eine Umgebung V von x existiert mit $f(y) \leq f(x)$ ($f(y) \geq f(x)$) für alle $y \in V$. Kann man V so wählen, dass sogar $f(y) < f(x)$ ($f(y) > f(x)$) für alle $y \in V \setminus \{x\}$ gilt, so nennt man x ein *isoliertes* oder *striktes lokales Maximum* (*Minimum*) für f . Man sagt, dass f ein (*isoliertes*) *lokales Extremum* in x_0 besitzt, wenn f in x_0 ein (isoliertes) lokales Maximum oder Minimum besitzt.

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in einem inneren Punkt $x \in]a, b[$ des Intervalls $[a, b]$ und besitzt f in x ein lokales Extremum, so ist $f'(x) = 0$ (Satz 15.2 in [EAI]). Dieser Satz lässt sich sehr einfach verallgemeinern auf Funktionen von n Veränderlichen.

Satz 7.7. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f partiell differenzierbar in x und besitzt f ein lokales Extremum in x , so ist $\text{grad } f(x) = 0$.

Beweis. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Nach Voraussetzung sind die Funktionen

$$g_i :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(t) = f(x + te_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

differenzierbar in $t = 0$ und besitzen ein lokales Extremum im Punkt $t = 0$. Nach dem oben zitierten Satz aus der Analysis I (Satz 15.2 in [EAI]) gilt

$$D_i f(x) = g'_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Also ist $\text{grad } f(x) = 0$. $\square$

Die in Satz 7.7 formulierte notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist schon im Falle $n = 1$ nicht hinreichend. Wir suchen nach hinreichenden Bedingungen.

Definition 7.8. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (das heißt, es sei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$). Man nennt A

- (a) *positiv definit*, falls $\langle Ax, x \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist,
- (b) *positiv semidefinit*, falls $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist,
- (c) *negativ definit* (bzw. *negativ semidefinit*), falls $-A$ positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist,
- (d) *indefinit*, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\langle Ax, x \rangle < 0 < \langle Ay, y \rangle$.

Bemerkung 7.9. In der Linearen Algebra zeigt man, dass es zu jeder symmetrischen Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis $(v_i)_{i=1}^n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt, das heißt, es gibt Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{und} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Insbesondere gilt dann für $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$$\left\langle A \left(\sum_{i=1}^n t_i v_i \right), \left(\sum_{i=1}^n t_i v_i \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2.$$

Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind genau die Eigenwerte der Matrix A

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda \in \mathbb{R}; \text{ es gibt ein } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ mit } Ax = \lambda x\}$$

und die symmetrische Matrix A ist

- positiv (bzw. negativ) definit genau dann, wenn $\lambda_i > 0$ (bzw. $\lambda_i < 0$) für alle $i = 1, \dots, n$ ist,
- positiv (bzw. negativ) semidefinit genau dann, wenn $\lambda_i \geq 0$ (bzw. $\lambda_i \leq 0$) für alle $i = 1, \dots, n$ ist,
- indefinit genau dann, wenn Indizes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$ existieren.

In der Linearen Algebra beweist man die folgende nützliche Charakterisierung positiv definiter Matrizen.

Satz (Hurwitz). Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist A positiv definit genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

ist für jedes $k = 1, \dots, n$.

Bemerkung 7.10. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$.

Die stetige Funktion

$$S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i$$

nimmt auf dem Kompaktum S ihr Minimum an (Korollar 3.11). Ist A positiv definit, so ist

$$c = \min_{x \in S} \langle Ax, x \rangle > 0,$$

und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \|x\|^2 \geq c \|x\|^2.$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung kann man ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums formulieren.

Satz 7.11. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f \in C^2(U)$ eine Funktion mit

$$\text{grad } f(x) = 0.$$

(a) Ist $\text{Hess}f(x)$ positiv definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum.

(b) Ist $\text{Hess}f(x)$ negativ definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Maximum.

(c) Ist $\text{Hess}f(x)$ indefinit, so hat f in x kein lokales Extremum.

Beweis. Sei $A = \text{Hess}f(x)$. Nach Korollar 7.5 gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle + \varphi(\xi) \text{ mit } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0.$$

Ist A positiv definit, so ist $c = \min\{\langle A\xi, \xi \rangle; \|\xi\| = 1\} > 0$. Zu $\frac{c}{4} > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \right| < \frac{c}{4}$$

für alle $\xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Mit Bemerkung 7.10 erhält man, dass

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{4} \right) \|\xi\|^2 > f(x)$$

für alle $\xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Also besitzt f ein isoliertes lokales Minimum im Punkt x .

Ist A negativ definit, so besitzt die Funktion $-f$ in x nach Teil (a) ein isoliertes lokales Minimum. Also hat f ein isoliertes lokales Maximum in x .

Ist A indefinit, so gibt es Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\langle Au, u \rangle > 0 > \langle Av, v \rangle$$

ist. Sei $c = \langle Au, u \rangle$ und $d = \langle Av, v \rangle$. Da man u und v ersetzen kann durch $\frac{u}{\|u\|}$ und $\frac{v}{\|v\|}$, dürfen wir annehmen, dass $\|u\| = \|v\| = 1$ ist. Ist $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ist $|t|$ klein genug, so gilt

$$f(x + tu) = f(x) + \frac{1}{2} \langle At u, tu \rangle + \varphi(tu) = f(x) + \left(\frac{c}{2} + \frac{\varphi(tu)}{\|tu\|^2} \right) t^2 > f(x)$$

und

$$f(x + tv) = f(x) + \left(\frac{d}{2} + \frac{\varphi(tv)}{\|tv\|^2} \right) t^2 < f(x).$$

Also enthält jede Umgebung V von x Punkte x_1, x_2 mit $f(x_1) > f(x) > f(x_2)$. Folglich besitzt f kein lokales Extremum im Punkt x . $\square$

Bemerkung 7.12. Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist (i) positiv definit genau dann, wenn $ad - b^2 > 0$ und $a > 0$ ist,

(ii) negativ definit genau dann, wenn $ad - b^2 > 0$ und $a < 0$ ist,

(iii) indefinit genau dann, wenn $ad - b^2 < 0$ ist.

Dabei folgen (i) und (ii) direkt aus dem Satz von Hurwitz. Zum Beweis von (iii) beachte man, dass es eine orthogonale Matrix $U \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ gibt so, dass

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt hat. Wegen $\det(A) = \det(U^{-1}AU) = \lambda_1 \lambda_2$ folgt (iii) aus Bemerkung 7.9.

Beispiele 7.13. (a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$$

ist zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(x, y) = (3(x + y)^2 - 12y, 3(x + y)^2 - 12x).$$

Es ist $\text{grad } f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $4y = (x + y)^2 = 4x$ bzw. wenn $x = y$ und $x(x - 1) = 0$ ist.

Also sind $u = (0, 0)$ und $v = (1, 1)$ die einzigen Nullstellen von $\text{grad } f$. Wegen

$$\text{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x + y) & 6(x + y) - 12 \\ 6(x + y) - 12 & 6(x + y) \end{pmatrix}$$

ist

$$\text{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit und

$$\text{Hess} f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Nach Satz 7.7 und Satz 7.11 besitzt f genau ein lokales Extremum. Dieses ist ein isoliertes lokales Minimum im Punkt $(1, 1)$.

- (b) Im Falle, dass die Hesse-Matrix nur positiv (oder negativ) semidefinit ist, kann man keine Aussage über das Vorliegen lokaler Extrema machen. Für die durch

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_2(x, y) = x^2, \quad f_3(x, y) = x^2 + y^3$$

definierten Funktionen auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\text{grad } f_k(0, 0) = (0, 0), \quad \text{Hess} f_k(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für $k = 1, 2, 3$. Aber im Punkt $(0, 0)$ besitzt f_1 ein isoliertes lokales Minimum, f_2 hat ein lokales, aber nicht isoliertes Minimum in $(0, 0)$ und f_3 besitzt kein lokales Extremum in $(0, 0)$.

8 Implizite Funktionen

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und sei $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist $F(a, b) = 0$ in einem Punkt $(a, b) \in U_1 \times U_2$ und gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b so, dass zu jedem $x \in V_1$ genau ein $y \in V_2$ existiert mit $F(x, y) = 0$, so wird durch

$$g : V_1 \rightarrow V_2, \quad g(x) = y, \text{ falls } y \in V_2 \text{ ist mit } F(x, y) = 0$$

eine Funktion definiert mit $g(a) = b$ und

$$\{(x, g(x)); x \in V_1\} = \{(x, y) \in V_1 \times V_2; F(x, y) = 0\}.$$

Wir wollen im Folgenden Bedingungen an die Funktion F beschreiben, unter denen Mengen V_1, V_2 wie oben existieren und unter denen die durch die Gleichung $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in V_1 \times V_2$, implizit gegebene Funktion $g : V_1 \rightarrow V_2$ sogar stetig oder differenzierbar gewählt werden kann.

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir schreiben die Elemente von $U_1 \times U_2$ in der Form (x, y) mit $x \in U_1$, $y \in U_2$. Seien $(a, b) \in U_1 \times U_2$ und $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in (a, b) , $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a so, dass $g(a) = b$ und $g(U_1) \subset U_2$ ist. Man nennt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b) \right)_{i,j} \in M(m \times k, \mathbb{R}), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{i,j} \in M(m \times m, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

die *partiellen Jacobi-Matrizen* von F nach x bzw. y in (a, b) und schreibt auch die Jacobi-Matrix von g in a in der Form

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = J_g(a) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \in M(m \times k, \mathbb{R}).$$

Die Jacobi-Matrix von F in (a, b) setzt sich zusammen aus den partiellen Jacobi-Matrizen

$$J_F(a, b) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \in M(m \times (k + m), \mathbb{R}).$$

Lemma 8.1. Seien $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $(a, b) \in U_1 \times U_2$, $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a mit $g(U_1) \subset U_2$, $g(a) = b$ und

$$F(x, g(x)) = 0$$

für alle $x \in U_1$. Dann gilt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \frac{\partial g}{\partial x}(a).$$

Ist $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar, so folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b).$$

Beweis. Da alle Koordinatenfunktionen der Funktion $h : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$, $h(x) = (x, g(x))$ differenzierbar in a sind, ist h differenzierbar in a mit

$$J_h(a) = \begin{pmatrix} I \\ J_g(a) \end{pmatrix},$$

wobei $I \in M(k \times k, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix bezeichne. Die Kettenregel (Satz 6.8 und die anschließende Bemerkung) angewendet auf die Identität

$$0 = F \circ h(x) \quad (x \in U_1)$$

impliziert, dass

$$\begin{aligned} 0 &= J_{F \circ h}(a) = J_F(h(a)) \cdot J_h(a) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \begin{pmatrix} I \\ J_g(a) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)I + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)J_g(a). \end{aligned}$$

Hieraus folgen alle Behauptungen. □

Wir bezeichnen im Folgenden mit $GL(m, \mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren Matrizen in $M(m \times m, \mathbb{R})$. Ist in der Situation von Lemma 8.1 die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar, so folgt die Differenzierbarkeit von g in a bereits aus der Stetigkeit.

Satz 8.2. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen von $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$ und sei

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

differenzierbar in (a, b) mit $F(a, b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$. Ist $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in a mit $g(a) = b$, $g(U_1) \subset U_2$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für } x \in U_1,$$

so ist g differenzierbar in a und

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b).$$

Beweis. Es genügt, den Satz zu beweisen unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $a = 0 = b$ ist. Sonst ersetze man F durch die Abbildung

$$\tilde{F} : (U_1 - a) \times (U_2 - b) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x + a, y + b)$$

und g durch $\tilde{g} : U_1 - a \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto g(x + a) - b$.

Seien also $a = 0 = b$. Wir schreiben

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \in M(m \times k, \mathbb{R}), \quad B = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \in GL(m, \mathbb{R})$$

für die partiellen Jacobi-Matrizen von F . Da F differenzierbar in $(0, 0)$ ist mit $F(0, 0) = 0$, ist

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x, y) = Ax + By + \varphi(x, y)$$

für $(x, y) \in U_1 \times U_2$ mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$0 = F(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + \varphi(x, g(x))$$

und damit

$$g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, g(x))$$

für alle $x \in U_1$. Wegen $g(0) = 0$ folgt die Differenzierbarkeit von g in 0, wenn wir zeigen können, dass der Ausdruck

$$\frac{\|\varphi(x, g(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|\varphi(x, g(x))\|}{\|(x, g(x))\|} \frac{\|(x, g(x))\|}{\|x\|}$$

gegen 0 strebt für $x \rightarrow 0$. Da der erste Faktor auf der rechten Seite für $x \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset U_1$ und

$$\frac{\|(\varphi(x, g(x)))\|}{\|(x, g(x))\|} < \frac{1}{2\|B^{-1}\|} \quad \text{für} \quad \|x\| < \delta.$$

Wegen $\|(x, g(x))\| \leq \|x\| + \|g(x)\|$ genügt es zu zeigen, dass $\|g(x)\|/\|x\|$ auf $B_\delta(0) \setminus \{0\}$ beschränkt ist. Aber für $\|x\| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|B^{-1}Ax + B^{-1}\varphi(x, g(x))\| \\ &\leq \|B^{-1}A\| \|x\| + \frac{1}{2}\|(x, g(x))\| \\ &\leq \left(\|B^{-1}A\| + \frac{1}{2}\right) \|x\| + \frac{1}{2}\|g(x)\|. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\|g(x)\|/\|x\| < 2 \left(\|B^{-1}A\| + \frac{1}{2} \right)$$

für $x \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Damit ist gezeigt, dass g differenzierbar ist in 0 und dass $\frac{\partial g}{\partial x}(0) = -B^{-1}A$ gilt. $\square$

Bemerkung 8.3. Ist $F \in C^1(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$ und ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$$

in einem Punkt $(a, b) \in U_1 \times U_2$, so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b so, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ invertierbar ist für alle $(x, y) \in V_1 \times V_2$. Zum Beweis beachte man, dass die partielle Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \frac{\partial F_1}{\partial y_{\pi(1)}}(x, y) \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_{\pi(m)}}(x, y)$$

stetig als Funktion von $(x, y) \in U_1 \times U_2$ ist. Hierbei wird die Summe über alle Permutationen der Menge $\{1, \dots, m\}$ gebildet. Folglich ist die Menge

$$\left\{ (x, y) \in U_1 \times U_2; \det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \right\} \subset U_1 \times U_2$$

offen.

Zum Beweis des Hauptsatzes über die Existenz implizit definierter Funktionen benutzen wir ein Fixpunktargument.

Satz 8.4 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $c \in (0, 1)$ eine Konstante und $T : X \rightarrow X$ eine c -Kontraktion, das heißt eine Abbildung mit $d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt, das heißt es gibt genau ein Element $a \in X$ mit $T(a) = a$.*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Wir definieren rekursiv eine Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in X durch

$$x_0 = x, \quad x_{k+1} = T(x_k) \quad (k \geq 0).$$

Dann gilt für alle $k \geq 0$

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq cd(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq c^k d(x_1, x_0).$$

Mit der Dreiecksungleichung erhält man für alle $q \geq p$ die Abschätzung

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} c^k \right) d(x_1, x_0).$$

Da die konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ die Cauchy-Bedingung erfüllt, ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in X . Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von X existiert der Grenzwert $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ in X . Da T stetig (sogar gleichmäßig stetig) ist, gilt $T(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = a$. Gilt auch $T(a') = a'$, so folgt

$$d(a, a') = d(T(a), T(a')) \leq cd(a, a').$$

Wegen $c \in (0, 1)$ ist $d(a, a') = 0$ und damit auch $a = a'$. □

Satz 8.5 (Implizite Funktionen). *Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen von Punkten $a \in \mathbb{R}^k$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Ist*

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

stetig partiell differenzierbar mit $F(a, b) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R}),$$

so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b und eine stetige Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit

$$\{(x, y) \in V_1 \times V_2; F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in V_1\}.$$

Beweis. Sei $B = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$. Nach der Kettenregel ist die Funktion

$$G : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, G(x, y) = y - B^{-1}F(x, y)$$

stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = I_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{für} \quad (x, y) \in U_1 \times U_2.$$

Hierbei bezeichnet I_m die $(m \times m)$ -Einheitsmatrix. Da $\frac{\partial G}{\partial y} : U_1 \times U_2 \rightarrow M(m \times m, \mathbb{R})$ stetig ist mit $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) = 0$, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| < \frac{1}{2}$$

für alle $(x, y) \in \overline{B}_\delta(a) \times \overline{B}_\delta(b) \subset U_1 \times U_2$. Für $x \in \overline{B}_\delta(a)$ zeigt die Mittelwertschätzung (Korollar 6.17) angewendet auf die Funktion $G(x, \cdot) \in C^1(U_2, \mathbb{R}^m)$, dass

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) \right\| \|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

für alle $y_1, y_2 \in \overline{B}_\delta(b)$ ist. Da G stetig ist, gibt es ein $r \in (0, \delta)$ mit $\|G(x, b) - G(a, b)\| < \delta/2$ für alle $x \in \overline{B}_r(a)$. Für $x \in \overline{B}_r(a)$ und $y \in \overline{B}_\delta(b)$ gilt

$$\|G(x, y) - b\| \leq \|G(x, y) - G(x, b)\| + \|G(x, b) - G(a, b)\| < \frac{1}{2} \|y - b\| + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 8.4) angewendet auf die Abbildungen

$$G(x, \cdot) : \overline{B}_\delta(b) \rightarrow \overline{B}_\delta(b) \quad (x \in \overline{B}_r(a))$$

zeigt, dass für jedes $x \in \overline{B}_r(a)$ genau ein Vektor $y = y(x) \in \overline{B}_\delta(b)$ existiert so, dass $y = G(x, y)$ ist.

Wegen $G(\overline{B}_r(a) \times \overline{B}_\delta(b)) \subset \overline{B}_\delta(b)$ ist $y(x) \in \overline{B}_\delta(b)$ für alle $x \in \overline{B}_r(a)$.

Wir zeigen, dass die Abbildung $g : \overline{B}_r(a) \rightarrow \overline{B}_\delta(b)$, $x \mapsto y(x)$ stetig ist in jedem Punkt $x_0 \in \overline{B}_r(a)$. Zum

Beweis beachte man, dass für $x, x_0 \in \overline{B}_r(a)$ gilt

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_0)\| &= \|G(x, g(x)) - G(x_0, g(x_0))\| \\ &\leq \|G(x, g(x)) - G(x, g(x_0))\| + \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(x) - g(x_0)\| + \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \end{aligned}$$

und damit

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq 2 \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} 0.$$

Die Beobachtung, dass

$$\{(x, y) \in \overline{B}_r(a) \times \overline{B}_\delta(b); F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in \overline{B}_r(a)\}$$

ist, beendet den Beweis. □

Durch Verkleinern der Umgebungen V_1 von a , V_2 und b in der Situation von Satz 8.5 kann man erreichen, dass auch die Funktion g stetig partiell differenzierbar ist und sogar k -mal stetig partiell differenzierbar ist, wenn $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ als k -mal stetig partiell differenzierbar vorausgesetzt wird.

Bemerkung 8.6. Sei in der Situation von Satz 8.5 zusätzlich W eine beliebige Umgebung von (a, b) . Da g stetig ist mit $g(a) = b$, gibt es offene Umgebungen $W_1 \subset V_1$ von a , $W_2 \subset V_2$ von b mit

$$W_1 \times W_2 \subset W \text{ und } g(W_1) \subset W_2.$$

Dann gilt automatisch wieder

$$\{(x, y) \in W_1 \times W_2; F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in W_1\}.$$

Nach Bemerkung 8.3 gibt es eine Umgebung W von (a, b) so, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \in GL(m, \mathbb{R})$$

für alle $(x, y) \in W$ ist. Wählt man zu dieser Umgebung W von (a, b) die Umgebungen W_1 von a und W_2 von b wie oben, so folgt mit Satz 8.2 angewendet auf $F : W_1 \times W_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : W_1 \rightarrow W_2$ und $(x, g(x))$ statt (a, b) , dass g differenzierbar ist in jedem $x \in W_1$ mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}((x, g(x)))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

für alle $x \in W_1$. In der Linearen Algebra zeigt man, dass die Inverse einer invertierbaren Matrix $A \in GL(m, \mathbb{R})$ die Form

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det A} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

hat, wobei $A_{ji} \in M((m-1) \times (m-1), \mathbb{R})$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Mit der Definition der Determinante (vgl. Bemerkung 8.3) folgt, dass für eine matrixwertige Abbildung $A : U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$, $x \mapsto (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizientenfunktionen $a_{ij} \in C(U)$ (bzw. $a_{ij} \in C^k(U)$) auch die durch

$$A(x)^{-1} = (b_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m} \quad (x \in U)$$

definierten Koeffizientenfunktionen der Abbildung $A^{-1} : U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$, $x \mapsto A(x)^{-1}$ wieder zu $C(U)$ (bzw. zu $C^k(U)$) gehören.

Also zeigt die obige Formel für die Jacobi-Matrix $\frac{\partial g}{\partial x} = J_g$, dass alle Koeffizientenfunktionen von J_g stetig auf W_1 sind und damit $g \in C^1(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist. Ist $F \in C^2(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$, so erhält man mit derselben Formel für $\frac{\partial g}{\partial x}$ durch Wiederholung des obigen Argumentes und Anwendung der Kettenregel (Korollar 6.10), dass $g \in C^2(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist. Induktiv folgt, dass $g \in C^k(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist, falls $F \in C^k(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$ ist. Ist F unendlich oft stetig partiell differenzierbar auf $U_1 \times U_2$, so folgt dasselbe für g auf W_1 .

Beispiel 8.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f \in C^k(U)$ mit $k \geq 1$. Sei $c \in \mathbb{R}$ und

$$(a, b) \in N_f(c) = \{(x, y) \in U; f(x, y) = c\}$$

mit $\text{grad } f(a, b) \neq 0$. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, so existieren nach Satz 8.5 und Bemerkung 8.6 offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a, b) \in I_1 \times I_2 \subset U$ und eine C^k -Funktion $g : I_1 \rightarrow I_2$ mit

$$N_f(c) \cap (I_1 \times I_2) = \{(x, g(x)); x \in I_1\}.$$

Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$, so existiert eine C^k -Funktion $h : J_2 \rightarrow J_1$ zwischen offenen Intervallen mit $(a, b) \in J_1 \times J_2 \subset U$ und

$$N_f(c) \cap (J_1 \times J_2) = \{(h(y), y); y \in J_2\}.$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv und sei $A = \min f([a, b])$, $B = \max f([a, b])$. In der Analysis I zeigt man, dass die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ stetig ist (Satz 11.2 und Satz 11.4 in [EAI]) und dass, falls f differenzierbar ist in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$, die Funktion $g = f^{-1}$ differenzierbar ist in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \quad (\text{Satz 14.12 in [EAI]}).$$

Ist $f : U_1 \rightarrow U_2$ bijektiv zwischen offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ mit Umkehrabbildung $g = f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ und sind f, g differenzierbar, so gilt nach der Kettenregel (Satz 6.8) und Beispiel 6.3, dass

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}^{n_1}} &= g'(f(x)) \circ f'(x), \\ I_{\mathbb{R}^{n_2}} &= f'(g(y)) \circ g'(y) \end{aligned}$$

für alle $x \in U_1$ und $y \in U_2$ ist. Also sind die linearen Abbildungen $f'(x) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ invertierbar für $x \in U_1$. Insbesondere gilt notwendigerweise, dass $n_1 = n_2$ ist.

Definition 8.8. Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $k \in \mathbb{N}^*$. Eine bijektive Abbildung $f : U_1 \rightarrow U_2$ heißt C^k -Diffeomorphismus oder C^k -invertierbar, wenn $f : U_1 \rightarrow U_2$ und $f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ beide C^k -Funktionen sind (als Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^n$).

Satz 8.9 (Lokale C^k -Invertierbarkeit). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Funktion ($1 \leq k \leq \infty$) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und seien $a \in U$, $b = f(a)$ so, dass $f'(a)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Umgebungen $W \subset U$ von a , $V = V(b) \subset \mathbb{R}^n$ von b so, dass $f : W \rightarrow V$ C^k -invertierbar ist. In diesem Fall ist das Differential der Umkehrabbildung $g = f^{-1} : V \rightarrow W$ gegeben durch

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1} \quad (x \in W).$$

Beweis. Da die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x, y) = x - f(y)$$

k -mal stetig partiell differenzierbar ist mit $F(b, a) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(b, a) = -J_f(a) \in GL(n, \mathbb{R})$ zeigt der Satz über implizite Funktionen (Satz 8.6), dass offene Umgebungen V von $b, \tilde{W} \subset U$ von a und eine Funktion $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ existieren mit $g(V) \subset \tilde{W}$ und

$$\{(x, y) \in V \times \tilde{W}; x = f(y)\} = \{(x, g(x)); x \in V\}.$$

Dann definiert $W = \tilde{W} \cap f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von a mit $f(W) \subset V$ und

$$\{(x, y) \in V \times W; x = f(y)\} = \{(x, g(x)); x \in V\}.$$

Da die rechte Menge in der linken enthalten ist, gilt $g(V) \subset W$ und

$$x = f(g(x)) \text{ für alle } x \in V.$$

Da die linke Menge in der rechten enthalten ist, ist für jedes $y \in W$ das Paar $(f(y), y)$ ein Element der rechten Menge, also

$$y = g(f(y)) \text{ für alle } y \in W.$$

Folglich ist $f : W \rightarrow V$ bijektiv mit C^k -Umkehrfunktion $g : V \rightarrow W$. Die Formel für $g'(f(x))$ folgt aus den Bemerkungen vor Definition 8.8 als Anwendung der Kettenregel (Satz 6.8). $\square$

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in der Situation von Satz 8.9 zusätzlich injektiv und ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$, so erhält man die globale C^k -Invertierbarkeit von f . In diesem Fall ist insbesondere das Bild $f(U_0)$ jeder offenen Menge $U_0 \subset U$ unter f eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$.

Korollar 8.10. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive C^k -Funktion ($1 \leq k \leq \infty$) so, dass $f'(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$. Dann ist die Menge $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine C^k -Funktion.

Beweis. Nach Satz 8.9 existiert für jeden Punkt $a \in U$ eine offene Umgebung $V(b) \subset \mathbb{R}^n$ von $b = f(a)$ mit $V(b) \subset f(U)$. Für $V(b)$ und g wie in Satz 8.9 ist $f^{-1}|_{V(b)} = g$ eine C^k -Funktion. $\square$

Beispiel 8.11. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ist C^∞ und für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ gilt

$$\det J_f(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \neq 0.$$

Die Inverse der Jacobi-Matrix ist

$$J_f(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Nach Satz 8.9 ist f lokal C^∞ -invertierbar. Sei $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Setze

$$(x, y) = f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. Ist $g : V \rightarrow W$ eine lokale C^∞ -Umkehrfunktion mit $(r, \varphi) \in W$ wie in Satz 8.9, so gilt

$$J_g(x, y) = J_f(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Da $f(r, \varphi) = f(r', \varphi')$ ist genau dann, wenn $r = r'$ und $\varphi - \varphi' \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist (Korollar 13.10 in [EAI]), ist für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_+^* \times]\varphi, \varphi + 2\pi[$ C^∞ -invertierbar nach Korollar 8.10. Ist $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, so nennt man (r, φ) die *Polarkoordinaten* von (x, y) . Für $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \neq (0, 0)$ ist

$$\tilde{f}^{-1}(\{(x, y)\}) = \{(r, \varphi + 2\pi k); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Man kann den Satz über implizite Funktionen benutzen, um notwendige Bedingungen für das Vorliegen *lokaler Extrema unter Nebenbedingungen* herzuleiten.

Satz 8.12 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $M = \{x \in U; f(x) = 0\}$. Ist $a \in M$ mit $\text{grad } f(a) \neq 0$ und ist $h \in C^1(U)$ eine Funktion, die in a ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $f = 0$ besitzt, das heißt, gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von a mit*

$$h(x) \leq h(a) \text{ für alle } x \in V \cap M \text{ (bzw. } h(x) \geq h(a) \text{ für alle } x \in V \cap M),$$

so gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad } h(a) = \lambda \text{ grad } f(a)$.

Beweis. Man darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\partial_n f(a) \neq 0$ ist. Sonst wähle man ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\partial_i f(a) \neq 0$ und ersetze f und h durch die Funktionen

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{h} = h \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \dots, x_i)$ die Abbildung sei, die die i -te und n -te Koordinate vertauscht. Dann hat $\tilde{h}$ ein lokales Extremum in $\varphi^{-1}(a)$ unter der Nebenbedingung $\tilde{f} = 0$ und wegen

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{f} &= \sum_{\nu=1}^n (\partial_\nu f) \circ \varphi (\partial_n \varphi_\nu) = (\partial_i f) \circ \varphi, \\ \text{grad } \tilde{h} &= (\partial_1 h, \dots, \partial_n h, \dots, \partial_i h) \circ \varphi, \\ \text{grad } \tilde{f} &= (\partial_1 f, \dots, \partial_n f, \dots, \partial_i f) \circ \varphi \end{aligned}$$

genügt es, den Satz für den Fall $\partial_n f(a) \neq 0$ zu beweisen.

Sei also $\partial_n f(a) \neq 0$. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ in der Form $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 8.6 gibt es offene Umgebungen W_1 von a' , W_2 von a_n und eine stetig partiell differenzierbare Funktion $g : W_1 \rightarrow W_2$ mit $W_1 \times W_2 \subset V$ und

- (i) $M \cap (W_1 \times W_2) = \{(x', g(x')) ; x' \in W_1\}$,
- (ii) $\partial_i f(x', g(x')) + \partial_n f(x', g(x')) \partial_i g(x') = 0$ für $i = 1, \dots, n-1, x' \in W_1$.

Dabei folgt die Gültigkeit von (ii) durch Ableiten der Identität $0 = f(x', g(x'))$, auf W_1 mit der Kettenregel (Korollar 6.9). Die C^1 -Funktion

$$H : W_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x') = h(x', g(x'))$$

hat in a' ein lokales Extremum. Nach Satz 7.7 ist $\text{grad } H(a') = 0$, und mit der Kettenregel (Korollar 6.9) folgt, dass

$$0 = \partial_i H(a') = \partial_i h(a) + \partial_n h(a) \partial_i g(a')$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Mit Bedingung (ii) folgt

$$\partial_i h(a) = \partial_n h(a) (-\partial_i g(a')) = \left(\frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)} \right) \partial_i f(a)$$

für $i = 1, \dots, n$. Also folgt die Behauptung mit $\lambda = \frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)}$ des Extremalproblems. $\square$

Die Zahl λ in Satz 8.12 nennt man den *Langrange-Multiplikator*.

Wir wenden den letzten Satz an, um den größten und kleinsten Eigenwert einer symmetrischen Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Hilfe der quadratischen Form von A zu berechnen.

Beispiel 8.13. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Da die Einheitssphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist und da die quadratische Form von A

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \langle Ax, x \rangle$$

stetig ist, gibt es Elemente $a^{(i)} \in S$ ($i = 1, 2$) mit

$$\langle Aa^{(1)}, a^{(1)} \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \langle Aa^{(2)}, a^{(2)} \rangle$$

für alle $x \in S$ (Korollar 3.11). Also besitzt die Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ in den Punkten $a^{(1)}, a^{(2)} \in S$ lokale (sogar absolute) Extrema unter der Nebenbedingung

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Wegen $\text{grad } f(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in S$ folgt mit Satz 8.12, dass $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\text{grad } h(a^{(i)}) = \lambda_i \text{grad } f(a^{(i)}) = 2 \lambda_i a^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

Da für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle A(x + \xi), x + \xi \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, \xi \rangle + \langle x, A\xi \rangle + \langle A\xi, \xi \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle 2Ax, \xi \rangle + o(\|\xi\|),$$

ist $\text{grad } h(x) = 2Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit folgt, dass

$$Aa^{(i)} = \lambda_i a^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

und dass

$$\lambda_1 = \langle Aa^{(1)}, a^{(1)} \rangle = \min\{\langle Ax, x \rangle; x \in S\},$$

$$\lambda_2 = \langle Aa^{(2)}, a^{(2)} \rangle = \max\{\langle Ax, x \rangle; x \in S\}.$$

Ist λ irgendein Eigenwert von A , so gibt es einen Vektor $x \in S$ mit $Ax = \lambda x$. Wegen $\langle Ax, x \rangle = \lambda$ sind λ_1 und λ_2 der kleinste und größte Eigenwert von A .

9 Parameterabhängige Integrale

Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und ist für jedes $x \in U$ die Funktion $f(\cdot, x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so kann man das Integral von f über die erste Variable als Funktion

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

der freien Variablen $x \in U$ betrachten. Im Folgenden wollen wir Bedingungen an f angeben, unter denen die resultierende Funktion φ stetig ist oder gewünschte Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt.

Lemma 9.1. *Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ eine stetige Funktion. Sei der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C(I) = \{g; g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$ versehen mit der Norm*

$$\|g\|_I = \sup_{t \in I} |g(t)|.$$

Dann ist die Abbildung $D \rightarrow C(I)$, $x \mapsto f(\cdot, x)$ stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und sei (x_k) eine Folge in D mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Wir nehmen an, dass die Folge $f(\cdot, x_k)$ in dem normierten Raum $C(I)$ nicht gegen $f(\cdot, x)$ konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge (z_k) von (x_k) mit $\|f(\cdot, z_k) - f(\cdot, x)\|_I > \epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$ gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $t_k \in I$ mit

$$|f(t_k, z_k) - f(t_k, x)| > \epsilon.$$

Da I kompakt ist, hat die Folge (t_k) nach Satz 3.8 eine konvergente Teilfolge

$$(t_{k_j}) \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} t \in I.$$

Dann ist $\lim_j (t_{k_j}, z_{k_j}) = (t, x) = \lim_j (t_{k_j}, x)$ und wegen der Stetigkeit von f in $(t, x) \in I \times D$ würde folgen, dass

$$\epsilon < |f(t_{k_j}, z_{k_j}) - f(t_{k_j}, x)| \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} |f(t, x) - f(t, x)| = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. Also konvergiert die Folge $(f(\cdot, x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(\cdot, x)$ in dem normierten Raum $C(I)$ für jede Folge (x_k) in D , die gegen $x \in D$ konvergiert. Damit ist die Stetigkeit der Abbildung $D \rightarrow C(I)$, $x \mapsto f(\cdot, x)$ gezeigt (siehe Definition 2.7). $\square$

Als Anwendung erhält man ein Stetigkeitskriterium für parameterabhängige Integrale.

Korollar 9.2. *Seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

stetig.

Beweis. Versieht man $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$, so ist die Abbildung

$$D \rightarrow C(I), x \mapsto f(\cdot, x)$$

stetig nach Lemma 9.1. Als Beispiel zu Satz 2.18 haben wir gesehen, dass

$$C(I) \rightarrow \mathbb{R}, g \mapsto \int_a^b g dt$$

eine stetige lineare Abbildung ist. Nach Satz 2.8 ist φ als Komposition von zwei stetigen Abbildungen stetig. $\square$

Wir versuchen, auf ähnliche Weise hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale zu beweisen.

Lemma 9.3. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und sei $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass*

(i) $f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist für alle $t \in I$ und

(ii) $I \times J \rightarrow \mathbb{R}, (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ stetig ist.

Ist $y \in J$ und ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $J \setminus \{y\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$, so konvergiert

$$\frac{f(\cdot, y_k) - f(\cdot, y)}{y_k - y} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y)$$

in dem normierten Raum $(C(I), \|\cdot\|_I)$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da die Funktion $\frac{\partial f}{\partial y} : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(t', y') \right| < \epsilon$$

für alle $(t, y), (t', y') \in I \times J$ mit $\|(t, y) - (t', y')\| < \delta$. Zu $\delta > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_k - y| < \delta$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4 in [EAI]) gibt es für jedes $k \geq k_0$ und jedes $t \in I$ eine Stelle $\theta_{t,k}$ zwischen y und y_k so, dass

$$\left| \frac{f(t, y_k) - f(t, y)}{y_k - y} - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \theta_{t,k}) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| < \epsilon$$

gilt. Benutzt haben wir dabei auch, dass $\|(t, \theta_{t,k}) - (t, y)\| = |\theta_{t,k} - y| \leq |y_k - y| < \delta$ für $k \geq k_0$ ist. Folglich ist

$$\left\| \frac{f(\cdot, y_k) - f(\cdot, y)}{y_k - y} - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y) \right\|_I < \epsilon$$

für alle $k \geq k_0$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir, dass unter den Voraussetzungen von Lemma 9.3 das über $t \in I$ gebildete Integral von f stetig differenzierbar von dem freien Parameter $y \in J$ abhängt.

Satz 9.4. Seien $I = [a, b]$, $J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und sei $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass

(i) $f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist für alle $t \in I$ und

(ii) $I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ stetig ist.

Dann definiert $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_a^b f(t, y) dt$ eine stetig differenzierbare Funktion auf J mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt$$

für alle $y \in J$.

Beweis. Da das Integral eine stetige lineare Abbildung

$$C(I) \rightarrow \mathbb{R}, g \mapsto \int_a^b g(t) dt$$

auf $C(I)$ (versehen mit der Supremumsnorm) definiert, folgt mit Lemma 9.3, dass für jedes $y \in J$ und für jede Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $J \setminus \{y\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ gilt

$$\frac{\varphi(y_k) - \varphi(y)}{y_k - y} = \int_a^b \frac{f(t, y_k) - f(t, y)}{y_k - y} dt \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt.$$

Also ist φ differenzierbar in jedem $y \in J$ mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt.$$

Die Stetigkeit von $\varphi' : J \rightarrow \mathbb{R}$ folgt mit Korollar 9.2. □

Satz 9.5. Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig so, dass

(i) $f(t, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar ist für alle $t \in I$ und

(ii) die partiellen Ableitungen

$$I \times U \rightarrow \mathbb{R}, (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y) \quad (1 \leq i \leq n)$$

stetig sind.

Dann definiert $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_a^b f(t, y) dt$ eine C^1 -Funktion mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y) dt \quad (i = 1, \dots, n, y \in U).$$

Beweis. Die partielle Differenzierbarkeit und die behauptete Formel für die Ableitung folgen direkt aus Satz 9.4, indem man alle bis auf eine der y_i -Variablen festhält. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$ folgt aus der Integraldarstellung dieser Funktionen mit Korollar 9.2. $\square$

Durch wiederholte Anwendung des letzten Satzes erhält man ein Kriterium für die k -malige stetige partielle Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen.

Korollar 9.6. Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}^*$ und $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig so, dass

(i) $f(t, \cdot) \in C^k(U)$ für alle $t \in I$ ist und

(ii) für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ die partielle Ableitung

$$I \times U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(t, y)$$

stetig ist.

Dann definiert $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_a^b f(t, y) dt$ eine C^k -Funktion mit

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial y^\alpha}(y) = \int_a^b \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(t, y) dt \quad (|\alpha| \leq k, y \in U).$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Induktion nach k unter Anwendung von Satz 9.5. $\square$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld (Definition 5.7). Gibt es eine Funktion $f \in C^1(U)$ mit

$$v = \text{grad } f$$

auf U , so ist $f \in C^2(U)$ und mit dem Satz von Schwarz (Satz 5.11) folgt, dass

$$\partial_j v_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i v_j \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Man nennt diese notwendige Bedingung auch die *Integrabilitätsbedingung* für das Vektorfeld v . Ist f eine Lösung der Gleichung $v = \text{grad } f$, so nennt man f ein *Potential* des Vektorfeldes v . Über hinreichend schönen Mengen hat auch umgekehrt jedes C^1 -Vektorfeld, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt, ein Potential. Wir zeigen dies nur für den Fall, dass U eine offene Kugel um 0 ist.

Satz 9.7. Seien $r > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r\}$ und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld mit

$$\partial_j v_i = \partial_i v_j \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Dann definiert $f : U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 v_i(tx) dt \right) x_i$$

eine C^1 -Funktion mit $\text{grad } f = v$ auf U .

Beweis. Die Funktionen

$$f_i : [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto v_i(tx) \quad (i = 1, \dots, n)$$

sind stetig und bei festem $t \in [0, 1]$ nach der Kettenregel (Korollar 6.9) partiell differenzierbar nach x . Die partiellen Ableitungen

$$[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx)t$$

sind stetig als Funktionen in $(t, x) \in [0, 1] \times U$ für $i, j = 1, \dots, n$. Nach Satz 9.5 sind die Funktionen

$$\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_i(x) = \int_0^1 v_i(tx) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

stetig partiell differenzierbar. Also ist auch die im Satz definierte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und mit der Formel aus Satz 9.5 folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx) t dt \right) x_i + \int_0^1 v_j(tx) dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(t \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx) x_i \right) + v_j(tx) \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tv_j(tx)) dt = v_j(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in U$ und $j = 1, \dots, n$. Dabei haben wir im vorletzten Schritt noch einmal die Kettenregel (Korollar 6.9) und im letzten Schritt den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung aus der Analysis I benutzt. $\square$

Da die Funktion v in Satz 9.7 stetig differenzierbar ist, ist das in Satz definierte Potential f natürlich sogar eine C^2 -Funktion. Man nennt eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig*, falls für alle $x \in U$ und $t \in [0, 1]$ auch $tx \in U$ ist. Im obigen Beweis wurde nicht wirklich benutzt, dass U eine offene Kugel um 0 ist, sondern nur, dass U eine offene sternförmige Menge ist. Satz 9.7 bleibt also richtig, wenn U allgemeiner eine offene sternförmige Menge ist.

Korollar 9.8. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, sternförmige Menge und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^1(U)$ mit $v = \text{grad } f$ genau dann, wenn $\text{rot } v = 0$ ist auf U .

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 9.7 und den obigen Bemerkungen zu Satz 9.7. $\square$

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Korollar 9.2 sind die Funktionen

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy,$$

$$[c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

stetig. Also existieren auch die beiden iterierten Integrale

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{und} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Satz 9.9. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$. Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Beweis. Die Funktion $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \int_c^y f(x, t) dt$$

ist stetig, denn für $(x, y), (x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^y f(x, t) dt - \int_c^{y_0} f(x_0, t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{y_0}^y f(x, t) dt \right| + \left| \int_c^{y_0} (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \\ & \leq |y - y_0| \|f\|_{[a, b] \times [c, d]} + |y_0 - c| \sup_{t \in [c, d]} |f(x, t) - f(x_0, t)|, \end{aligned}$$

und beide Summanden in der letzten Zeile konvergieren gegen 0 für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Man beachte dabei, dass f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist. Da F partiell differenzierbar nach y ist und die partielle Ableitung

$$[a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

stetig ist, ist die Funktion

$$\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x, t) dt \right) dx$$

nach Satz 9.4 stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in [c, d]).$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \varphi'(y) dy = \varphi(d) - \varphi(c) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir verallgemeinern den letzten Satz auf den Fall von n -fach iterierten Integralen.

Sei $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader ($a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu < b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$). Ist $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist nach Korollar 9.2 auch die Funktion

$$\prod_{\nu=2}^n [a_\nu, b_\nu] \rightarrow \mathbb{R}, (x_2, \dots, x_n) \mapsto \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$$

stetig. Aus demselben Grunde ist

$$\prod_{\nu=3}^n [a_\nu, b_\nu] \rightarrow \mathbb{R}, (x_3, \dots, x_n) \mapsto \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2$$

stetig. Nach n Schritten erhält man das *iterierte Riemann-Integral* von f

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_{n-1} \right) dx_n,$$

wobei die linke Seite als abkürzende Schreibweise für die rechte Seite gemeint ist. Wir bezeichnen mit $V(Q) = \prod_{\nu=1}^n (b_\nu - a_\nu)$ das *Volumen* von Q . Unter einer *Teilung* von Q versteht man ein Tupel $T = (T_1, \dots, T_n)$ aus Teilungen T_ν von $[a_\nu, b_\nu]$. Sei

$$T_\nu = (t_{\nu,i})_{0 \leq i \leq r_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Wir nennen $\omega(T) = \max_{\nu=1, \dots, n} \omega(T_\nu)$ die *Spurweite* von T und definieren

$$\begin{aligned} I &= I(T) = \prod_{\nu=1}^n \{1, \dots, r_\nu\}, \\ \mathcal{T} &= \left\{ \prod_{\nu=1}^n [t_{\nu,i_\nu-1}, t_{\nu,i_\nu}] ; i = (i_1, \dots, i_n) \in I \right\}, \\ Q(i, T) &= \prod_{\nu=1}^n [t_{\nu,i_\nu-1}, t_{\nu,i_\nu}] \quad (i \in I). \end{aligned}$$

Auch iterierte Riemann-Integrale lassen sich durch geeignete Riemann-Summen approximieren (vgl. Satz 16.11 in [EAI]).

Satz 9.10. Sei $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu]$ ($a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu < b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$) ein abgeschlossener Quader und sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jede Teilung T von Q mit Spurweite $\omega(T) < \delta$ und jede Wahl von Punkten $\xi_i \in Q(i, T)$ ($i \in I(T)$) gilt

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - \sum_{i \in I(T)} f(\xi_i) V(Q(i, T)) \right| < \epsilon.$$

Beweis. Wie im eindimensionalen Fall nennen wir die im Satz auftretende endliche Summe eine *Riemann-Summe* bezüglich der Teilung T und schreiben sie abkürzend als $S(f, T, (\xi_i)_{i \in I})$. Sei $\epsilon > 0$. Da f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{V(Q)}$$

für alle $x, y \in Q$ mit $\|x - y\| < \delta$. Sei T eine Teilung von Q mit $\omega(T) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ und sei für jedes $i \in I = I(T)$ ein Punkt $\xi_i \in Q(i, T)$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - S(f, T, (\xi_i)_{i \in I}) \right| \\ &= \left| \sum_{i \in I} \int_{t_{n, i_{n-1}}}^{t_{n, i_n}} \dots \int_{t_{1, i_1-1}}^{t_{1, i_1}} (f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_i)) dx_1 \dots dx_n \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} \int_{t_{n, i_{n-1}}}^{t_{n, i_n}} \dots \int_{t_{1, i_1-1}}^{t_{1, i_1}} |f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_i)| dx_1 \dots dx_n \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass für $i \in I$ und $x \in Q(i, T)$ gilt

$$\|(x_1, \dots, x_n) - \xi_i\| \leq \sqrt{n} \|(x_1, \dots, x_n) - \xi_i\|_\infty \leq \sqrt{n} \omega(T) < \delta$$

(siehe Bemerkung 1.6) und daher $|f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_i)| < \frac{\epsilon}{V(Q)}$. □

Wir nennen eine Folge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen T_k des Quaders $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu]$ eine *Teilungen-Nullfolge*, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(T_k) = 0$ ist.

Korollar 9.11. *Seien Q und f wie in Satz 9.10. Ist $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilungen-Nullfolge von Q und ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Teilquader $R \in \mathcal{T}_k$ ein Punkt $\xi_{k,R} \in R$ gegeben, so gilt*

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{R \in \mathcal{T}_k} f(\xi_{k,R}) V(R).$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 9.10. □

Wählt man eine andere Integrationsreihenfolge zur Definition des iterierten Riemann-Integrals

$$\int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}} \left(\dots \left(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\pi(1)} \right) \dots \right) dx_{\pi(n)},$$

wobei π eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist, so zeigt der Beweis von Satz 9.10, dass Korollar 9.11 richtig bleibt, wenn man das iterierte Riemann-Integral auf der linken Seite ersetzt, durch das in der neuen Integrationsreihenfolge berechnete Integral.

Korollar 9.12. Sei $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu]$ ($a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu \leq b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$) ein kompakter Quader und sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle Permutationen $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}} \left(\dots \left(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\pi(1)} \right) \dots \right) dx_{\pi(n)}.$$

Beweis. Der Beweis ist wie oben begründet eine direkte Konsequenz von Satz 9.10 und Korollar 9.11. $\square$

Da das iterierte Riemann-Integral stetiger Funktionen auf kompakten Quadern unabhängig von der Integrationsreihenfolge ist, schreibt man in der Situation von Korollar 9.12 auch

$$\int_Q f dx = \int_Q f dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Korollar 9.13 (Satz von Fubini). Seien $R \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Quader und sei $f : R \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{R \times Q} f dx = \int_R \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx = \int_Q \left(\int_R f(x, y) dx \right) dy.$$

Beweis. Seien $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ und $Q = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_R \left(\int_Q f dy \right) dx &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{c_n}^{d_n} \dots \int_{c_1}^{d_1} f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \right) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_{c_n}^{d_n} \dots \int_{c_1}^{d_1} \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{R \times Q} f dx = \int_Q \left(\int_R f(x, y) dx \right) dy, \end{aligned}$$

wobei wir Korollar 9.12 benutzt haben. $\square$

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit

Im Folgenden sollen einige erste Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen hergeleitet werden. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel 10.1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y' = ay \quad (\text{das heißt mit } y'(t) = ay(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}).$$

Offensichtlich wird die Gleichung gelöst von der Funktion $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y_0(t) = e^{at}$. Mit $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen cy_0 ($c \in \mathbb{R}$) Lösungen der Differentialgleichung. Ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Lösung, so gilt

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = (y'(t) - ay(t))e^{-at} = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $y(t)e^{-at} = y(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit

$$y(t) = y(0)e^{at} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = ay$ auf $\mathbb{R}$ sind also genau die Funktionen cy_0 ($c \in \mathbb{R}$).

Definition 10.2. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, y); t \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}^n\}$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, y) \mapsto f(t, y)$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$(*) \quad y' = f(t, y)$$

eine *Differentialgleichung 1. Ordnung*. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit

$$G(\varphi) = \{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset G$$

und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in I,$$

so heißt φ Lösung der Differentialgleichung $(*)$ auf I .

Man beachte, dass in der Situation von Definition 10.2 jede Lösung φ der Differentialgleichung $(*)$ automatisch stetig differenzierbar ist. In Beispiel 10.1 ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t, y) = ay$.

Definition 10.3. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Man sagt

(a) f genügt auf G einer *Lipschitz-Bedingung* (bezüglich y gleichmäßig in t) mit *Lipschitz-Konstante* $L \geq 0$, wenn

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in G$ gilt.

(b) f genügt auf G lokal einer Lipschitz-Bedingung, falls jeder Punkt $(t_0, y_0) \in G$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ besitzt so, dass $f|_{U \cap G}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 10.4. Seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar bezüglich $y_1, \dots, y_n$, das heißt f sei partiell differenzierbar bezüglich $y_1, \dots, y_n$ und die Funktionen

$$G \rightarrow \mathbb{R}^m, (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y) \right)_{1 \leq i \leq m} \quad (j = 1, \dots, n)$$

sind stetig. Dann genügt f auf G lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Sei $(t_0, y_0) \in G$. Wähle $r > 0$ so, dass die Menge

$$V = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq r \text{ und } \|y - y_0\| \leq r\} \subset G$$

ist. Für $(t, y) \in G$ schreiben wir $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y) \right) \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Da $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist

$$L = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right\|; (t, y) \in V \right\} < \infty.$$

Nach der Mittelwertabschätzung (Korollar 6.17) angewendet auf die Funktionen $f(t, \cdot)|_{B_r(y_0)}$ gilt

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

für $(t, y), (t, \tilde{y}) \in]t_0 - r, t_0 + r[\times B_r(y_0)$. □

Satz 10.5. (Eindeutigkeitssatz) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig so, dass f auf G lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

so, dass ein $t_0 \in I$ existiert mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Dann ist $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. In einem ersten Schritt zeigen wir:

(i) Ist $a \in I$ mit $\varphi(a) = \psi(a)$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(x) = \psi(x) \text{ für alle } x \in I \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Zur Begründung beachte man, dass nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt, \\ \psi(x) &= \psi(a) + \int_a^x f(t, \psi(t)) dt. \end{aligned}$$

Da f lokal Lipschitz ist auf G , gibt es eine reelle Zahl $L > 0$ mit $0 < \delta < 1/L$ so, dass

$$J_\delta(a) = \{t \in I; |t - a| \leq \delta\} \subset I$$

kompakt ist und

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|$$

für alle $t \in J_\delta(a)$ gilt. Mit Lemma 6.16 erhält man

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \left| \int_a^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| dt \right| \leq \delta L s(\delta)$$

für alle $x \in J_\delta(a)$ mit

$$s(\delta) = \sup_{t \in J_\delta(a)} \|\varphi(t) - \psi(t)\| < \infty.$$

Die obige Abschätzung zeigt, dass

$$s(\delta) \leq (\delta L)s(\delta)$$

ist. Da $\delta L < 1$ ist, folgt $s(\delta) = 0$ oder äquivalent $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in J_\delta(a)$.

Im zweiten Schritt zeigen wir:

(ii) Es gilt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $t_0 < \sup(I)$ ist. Wir setzen

$$\beta = \sup\{t \in I; t \geq t_0 \text{ und } \varphi = \psi \text{ auf } [t_0, t]\}.$$

Aus (i) folgt, dass $\beta > t_0$ ist. Nach Definition von β ist $\varphi = \psi$ auf $[t_0, \beta[$. Wäre $\beta < \sup(I)$, so würde β zu I gehören und wegen der Stetigkeit von φ und ψ würde folgen, dass $\varphi = \psi$ auf $[t_0, \beta]$ gilt. Nach (i) gäbe es dann aber ein $\delta > 0$ mit $\varphi = \psi$ auf $[t_0, \beta + \delta]$. Dies widerspricht der Definition von β . Also ist $\beta = \sup(I)$ und die Gültigkeit von (ii) ist gezeigt.

Genauso wie in den ersten beiden Schritten kann man zeigen, dass auch $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \leq t_0$ gilt. Insgesamt folgt also, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ gilt. $\square$

Satz 10.6. (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die auf G lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es für jeden Punkt $(a, c) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [a - \epsilon, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\varphi' = f(t, y)$$

mit Anfangswert $\varphi(a) = c$.

Beweis. Wir wählen eine Zahl $r > 0$ mit

$$V = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - a| \leq r \text{ und } \|y - c\| \leq r\} \subset G$$

und so, dass $f|_V$ einer Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten $L > 0$ genügt. Da $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt ist, ist

$$M = \|f\|_V < \infty.$$

Wir definieren $\epsilon = \min\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M+1}\}$ und $I = [a - \epsilon, a + \epsilon]$, $X = C(I, \mathbb{R}^n) = \{\varphi; \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist stetig}\}$. Dann ist

$$I \times \overline{B}_r(c) \subset V \subset G$$

und X versehen mit der Norm $\|\varphi\|_I = \sup\{\|\varphi(t)\|; t \in I\}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Sei $b \in X$ die konstante Funktion $b(t) \equiv c$ und sei $T : \overline{B}_r(b) \rightarrow X$ definiert durch

$$(T\varphi)(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Da für alle $\varphi \in \overline{B}_r(b)$ gilt

$$\|T\varphi - b\|_I = \sup_{x \in I} \left\| \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq \sup_{x \in I} M|x - a| \leq M\epsilon \leq r,$$

ist $T\overline{B}_r(b) \subset \overline{B}_r(b)$. Da für alle $\varphi, \psi \in \overline{B}_r(b)$ gilt

$$\|T\varphi - T\psi\|_I = \sup_{x \in I} \left\| \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))) dt \right\| \leq L\epsilon\|\varphi - \psi\|_I \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_I,$$

folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 8.4), dass genau eine Funktion $\varphi \in \overline{B}_r(b)$ existiert mit $T\varphi = \varphi$ oder äquivalent mit

$$\varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) \text{ für alle } x \in I.$$

Nach dem komponentenweise angewendeten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist φ differenzierbar mit $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$. □

In der Situation von Satz 10.6 gibt es eine Lösung φ mit maximalem Definitionsbereich.

Korollar 10.7. Seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in Satz 10.6. Dann hat das Anfangswertproblem

$$(*) \quad \varphi' = f(t, y), \quad y(a) = c$$

eine eindeutige maximale Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das soll heißen

(i) ψ ist eine Lösung von (*),

(ii) für jede andere Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (*) ist $I \subset J$ und $\varphi = \psi|_I$.

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $a \in I$ so, dass (*) eine Lösung $\varphi_I : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat. Da die Intervalle in $\mathbb{R}$ genau die konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, ist die durch

$$J = \bigcup (I; I \in \mathfrak{M}) \subset \mathbb{R}$$

definierte Menge ein Intervall in $\mathbb{R}$. Für $I_1, I_2 \in \mathfrak{M}$ gilt nach dem Eindeutigkeitssatz (Satz 10.5) $\varphi_{I_1} = \varphi_{I_2}$ auf $I_1 \cap I_2$. Also ist

$$\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi(t) = \varphi_I(t), \text{ falls } t \in I \in \mathfrak{M} \text{ ist,}$$

eine wohldefinierte Funktion, die die Eigenschaft (ii) hat. Um zu sehen, dass $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangwertproblems (*) ist, beachte man zunächst, dass alle Punkte $t \in \text{Int}(J)$ schon ganz in $\text{Int}(I)$ für ein Intervall $I \in \mathfrak{M}$ liegen. Für $t = a$ folgt dies aus dem lokalen Existenzsatz (Satz 10.6). Für $a < t \in \text{Int}(J)$ gibt es ein $s \in J$ und ein $I \in \mathfrak{M}$ mit $t < s \in I$. Dann ist aber $t \in]a, s[\subset \text{Int}(I)$. Für $a > t \in \text{Int}(J)$ schließt man analog. Ist $t \in J \cap \partial J$, so wähle man ein beliebiges Intervall $I \in \mathfrak{M}$ mit $t \in I$ und beachte, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $J \cap]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset I$. In beiden Fällen gilt

$$\psi'(t) = \varphi'_I(t) = f(t, \varphi_I(t)) = f(t, \psi(t)).$$

□

11 Elementare Lösungsmethoden

A Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $0 \notin h(J)$.

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)h(y)$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Satz 11.1. Seien $g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ mit $0 \notin h(J)$. Sei $(t_0, y_0) \in I \times J$ und seien $G : I \rightarrow \mathbb{R}, H : J \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds, \quad H(y) = \int_{y_0}^y \frac{dx}{h(x)}.$$

Dann ist $H : J \rightarrow H(J)$ eine C^1 -invertierbare Abbildung zwischen offenen Intervallen in $\mathbb{R}$.

Ist $I' \subset I$ ein Intervall mit $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0$$

eine Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf I' genau dann, wenn $G(I') \subset H(J)$ ist. In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt, und es ist

$$(*) \quad H(\varphi(t)) = G(t) \text{ für alle } t \in I'.$$

Beweis. Wegen $H'(y) = 1/h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ ist nach dem Zwischenwertsatz $H' > 0$ oder $H' < 0$ auf ganz J . Also ist $H : J \rightarrow H(J)$ nach Satz 8.9 C^1 -invertierbar mit $(H^{-1})'(H(y)) = 1/H'(y) = h(y)$ für alle $y \in J$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass $H(J) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Ist $I' \subset I$ ein Intervall mit $G(I') \subset H(J)$, so definiert

$$\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = H^{-1}(G(t))$$

eine differenzierbare Funktion mit $\varphi(t_0) = H^{-1}(0) = y_0$ und

$$\varphi'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = (H^{-1})'(H(\varphi(t)))g(t) = h(\varphi(t))g(t)$$

für alle $t \in I'$.

Ist umgekehrt $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ auf einem Intervall $I' \subset I$ mit $t_0 \in I'$, so ist $\varphi(I') \subset J$ und $H \circ \varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$(H \circ \varphi)'(t) = \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) = G'(t)$$

für alle $t \in I'$. Wegen $H \circ \varphi(t_0) = H(y_0) = 0 = G(t_0)$ ist

$$G(t) = H(\varphi(t)) \in H(J) \text{ für } t \in I'$$

und daher

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t))$$

für $t \in I'$. □

Beispiel 11.2. Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) = 1, \quad h(y) = y^2.$$

Da die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(t, y) = g(t)h(y) = y^2$ nach Lemma 10.4 auf $\mathbb{R}^2$ lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gelten die Existenz- und Eindeutigkeitsätze aus §10 für die Differentialgleichung

$$y' = f(t, y) = y^2.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ suchen wir die Lösungen des Anfangswertproblems

$$(*) \quad y' = y^2, \quad y(0) = c.$$

Ist $c = 0$, so ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) \equiv 0$ die maximale Lösung von $(*)$ im Sinne von Korollar 10.7.

(i) Sei $c > 0$. Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$, so ist

$$\varphi(t) > 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Denn sonst gäbe es nach dem Zwischenwertsatz ein $t_0 \in I$ mit $\varphi(t_0) = 0$ und nach dem Eindeutigkeitsatz (Satz 10.5) wäre $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in I$. Die Existenz einer

Lösung von $(*)$ auf I ist in diesem Falle also äquivalent zur Existenz einer Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$y' = g(t)h(y), \quad y(0) = c$$

mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \equiv 1$ und $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = y^2$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 11.1 ist

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(t) = \int_0^t 1 ds = t, \quad H : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, H(y) = \int_c^y \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}.$$

Wegen $H((0, \infty)) = (-\infty, \frac{1}{c})$ und

$$H^{-1}(t) = \frac{c}{1 - ct} \quad (t < \frac{1}{c})$$

ist die maximale Lösung von $(*)$ im Sinne von Korollar 10.7 die Funktion

$$\varphi : (-\infty, \frac{1}{c}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = H^{-1}(G(t)) = \frac{c}{1 - ct}.$$

(ii) Sei $c < 0$. Völlig analog zu (ii) folgt, dass die maximale Lösung von $(*)$ gegeben ist durch

$$\varphi : (\frac{1}{c}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{c}{1 - ct}.$$

B Lineare Differentialgleichungen

Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall positiver Länge). Dann nennt man

$$y' = a(t)y + b(t)$$

eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Man nennt die Differentialgleichung *homogen*, falls $b \equiv 0$ ist, und *inhomogen* sonst. Da die Funktion

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t, y) = a(t)y + b(t)$$

stetig ist und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt auf $I \times \mathbb{R}$, gelten die Existenz- und Eindeigkeitssätze aus §10.

Satz 11.3. *Sei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ hat das lineare homogene Anfangswertproblem*

$$y'(t) = a(t)y, \quad y(t_0) = c$$

auf I die eindeutige Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = c \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Dies ist die maximale Lösung der Differentialgleichung im Sinne von Korollar 10.7.

Beweis. Eine einfache Anwendung der Kettenregel zeigt, dass die angegebene Funktion das Anfangswertproblem löst. Die behauptete Eindeutigkeit und der Zusatz folgen aus Satz 10.5 und Korollar 10.7. $\square$

Satz 11.4. Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ hat das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$y' = a(t)y + b(t), \quad y(t_0) = c$$

auf I die eindeutige Lösung $\psi_c : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi_c(t) = \varphi(t) \left(c + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} ds \right)$$

mit $\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(x) dx\right)$. Die Funktion ψ_c ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems im Sinne von Korollar 10.7.

Beweis. Mit der Produktregel folgt, dass $\psi_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem löst. Die behauptete Eindeutigkeit und der Zusatz folgen wieder aus Satz 10.5 und Korollar 10.7. $\square$

Beispiel 11.5. Das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2y + t^5, \quad y(0) = c$$

hat auf $\mathbb{R}$ die eindeutige Lösung

$$\psi_c(t) = e^{t^3} \left(c + \int_0^t s^5 e^{-s^3} ds \right) = e^{t^3} \left(c - \frac{1}{3} \int_0^t s^3 (e^{-s^3})' ds \right).$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^t s^3 (e^{-s^3})' ds = s^3 e^{-s^3} \Big|_0^t - 3 \int_0^t s^2 e^{-s^3} ds = t^3 e^{-t^3} + e^{-s^3} \Big|_0^t = (t^3 + 1) e^{-t^3} - 1.$$

Also ist

$$\psi_c(t) = e^{t^3} \left(c + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(t^3 + 1)$$

für $t \in \mathbb{R}$.

C Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition 11.6. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$(*) \quad y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar mit

$$(i) \quad (t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in G$$

$$(ii) \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in I$, so heißt φ *Lösung der Differentialgleichung $(*)$* .

Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ in der Form

$$(t, y) = (t, y_0, \dots, y_{n-1})$$

und definieren für G und f wie oben eine stetige Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Das Problem, die Differentialgleichung n -ter Ordnung $(*)$ zu lösen, lässt sich reduzieren auf das Problem, das Differentialgleichungssystem

$$(**) \quad y' = F(t, y)$$

zu lösen. Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $(*)$, so definiert

$$\Phi = (\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Systems (**). Die Abbildung

$$\{\varphi; \varphi \text{ ist Lösung von } (*)\} \rightarrow \{\Phi; \Phi \text{ ist Lösung von } (**)\}, \varphi \mapsto \Phi$$

definiert eine Bijektion zwischen den Lösungsräumen.

Bemerkung 11.7. Mit den obigen Bezeichnungen folgt, dass die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ (lokal) eine Lipschitz-Bedingung auf G erfüllt, genau dann, wenn die Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lokal) eine Lipschitz-Bedingung auf G erfüllt. Dies folgt leicht aus der Beobachtung, dass für $(t, y), (t, \tilde{y}) \in G$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, \tilde{y})| &\leq \|F(t, y) - F(t, \tilde{y})\| \\ &= \|(y_1 - \tilde{y}_1, \dots, y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}, f(t, y) - f(t, \tilde{y}))\| \\ &\leq \sqrt{n} \|(y_1 - \tilde{y}_1, \dots, y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}, f(t, y) - f(t, \tilde{y}))\|_\infty \\ &\leq \sqrt{n} \max(\|y - \tilde{y}\|, |f(t, y) - f(t, \tilde{y})|) \end{aligned}$$

gelten.

Satz 11.8. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal auf G einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gilt:

(a) (Eindeutigkeit) Sind $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von

$$(*) \quad y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

mit $(\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) = (\psi(t_0), \dots, \psi^{(n-1)}(t_0))$ für ein $t_0 \in I$, so ist $\varphi = \psi$.

Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ zusätzlich offen, so gilt:

(b) (Existenz) Zu jedem Punkt $(a, c_0, \dots, c_{n-1}) \in G$ existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [a - \epsilon, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ von (*) mit Anfangswert $(\varphi(a), \varphi^{(1)}(a), \dots, \varphi^{(n-1)}(a)) = (c_0, \dots, c_{n-1})$.

(c) (Maximale Lösungen) Zu $(a, c_0, \dots, c_{n-1}) \in G$ existiert eine eindeutige maximale Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \quad (y(a), \dots, y^{(n-1)}(a)) = (c_0, \dots, c_{n-1}).$$

Alle Behauptungen folgen direkt aus den entsprechenden Sätzen aus §10.

12 Lineare Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ im Folgenden ein Intervall positiver Länge und sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Wir wissen, dass K^n versehen mit der euklidischen Norm

$$\|(x_i)_{i=1}^n\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

ein vollständiger normierter K -Vektorraum ist (Beispiele 1.5 und Satz 2.5) und das auf $M(n \times n, K)$ durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in K^n \text{ mit } \|x\| \leq 1\}$$

eine vollständige Norm definiert wird mit (Lemma 2.21 und Bemerkung 2.22)

- (i) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (A \in M(n \times n, K), x \in K^n)$
- (ii) Konvergenz in $M(n \times n, K)$ ist komponentenweise Konvergenz.

Bemerkung 12.1. Die Abbildung

$$\rho : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ist ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Es gilt

$$\|\rho(z_1, \dots, z_n)\| = \|(z_1, \dots, z_n)\| \text{ für alle } (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

für die euklidischen Normen. Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ vermöge der Abbildung ρ . Insbesondere bedeutet dies:

- (a) Eine Funktion $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist differenzierbar genau dann, wenn die Funktionen $\operatorname{Re} \varphi_i, \operatorname{Im} \varphi_i$ ($i = 1, \dots, n$) differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$\varphi'(t) = ((\operatorname{Re} \varphi_1)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi_1)'(t), \dots, (\operatorname{Re} \varphi_n)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi_n)'(t)).$$

- (b) Ist $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig, so ist für $a, b \in I$

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \left(\int_a^b \operatorname{Re} \varphi_1 dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_1 dt, \dots, \int_a^b \operatorname{Re} \varphi_n dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_n dt \right).$$

Es ist

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|\varphi(t)\| dt \right|.$$

Für $x_0 \in I$ ist

$$\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}^n, \Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$$

differenzierbar mit $\Phi'(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in I$.

(c) Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig differenzierbar, so gilt der Hauptsatz

$$\int_x^y \varphi'(t) dt = \varphi(y) - \varphi(x) \text{ für alle } x, y \in I.$$

Die Aussagen (a)- (c) gelten sinngemäß natürlich auch für Funktionen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 12.2. Seien $A : I \rightarrow M(n \times n, K), b : I \rightarrow K^n$ stetig. Man nennt

$$y' = A(t)y$$

ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem* und

$$y' = A(t)y + b(t)$$

ein *inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem*.

Satz 12.3. Seien $A : I \rightarrow M(n \times n, K), b : I \rightarrow K^n$ stetig. Dann gibt es für alle $(t_0, c) \in I \times K^n$ genau eine Lösung

$$\varphi : I \rightarrow K^n$$

des *linearen Anfangswertproblems*

$$y' = A(t)y + b(t), y(t_0) = c.$$

Beweis. Auf $G = I \times K^n$ wird durch $f : G \rightarrow K^n$,

$$f(t, y) = A(t)y + b(t)$$

eine stetige Funktion definiert. Diese Funktion erfüllt lokal eine Lipschitz-Bedingung auf G , denn für jede kompakte Menge $C \subset I$ ist $L = L(C) = \sup\{\|A(t)\|; t \in C\} < \infty$ und für alle $(t, y), (t, \tilde{y}) \in C \times K^n$ gilt

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| = \|A(t)(y - \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Damit folgt die behauptete Eindeutigkeit der Lösungen aus Satz 10.5. Zum Beweis der Existenz einer globalen Lösung definieren wir rekursiv eine Folge $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ von Funktionen in dem K -Vektorraum $X = C(I, K^n)$ durch

$$\varphi_0 \equiv c, \quad \varphi_{k+1}(t) = c + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds.$$

Sei $J \subset I$ ein kompaktes Teilintervall mit $t_0 \in J$. Wir definieren $d = \sup\{|t - t_0|; t \in J\}$ und

$$m = \sup_{t \in J} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|, \quad L = L(J) = \sup_{t \in J} \|A(t)\|$$

und zeigen induktiv, dass für alle $k \geq 0$ gilt

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq m \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \quad (t \in J).$$

Dies ist klar für $k = 0$. Gilt die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$, so folgt für alle $t \in J$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi_{k+1}(s)) - f(s, \varphi_k(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|\varphi_{k+1}(s) - \varphi_k(s)\| ds \right| \leq \frac{m L^{k+1}}{k!} \left| \int_{t_0}^t (s - t_0)^k ds \right| \\ &= m \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}. \end{aligned}$$

Da die Reihe über die Folge $(\alpha_k)_{k \geq 0} = \left(m \frac{L^k d^k}{k!}\right)_{k \geq 0}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=p}^q \alpha_k < \epsilon \quad \text{für alle } q \geq p \geq N.$$

Dann gilt aber auch

$$\|\varphi_q(t) - \varphi_p(t)\| < \epsilon$$

für alle $q \geq p \geq N$ und $t \in J$. Da $J \subset I$ ein beliebiges kompaktes Intervall mit $t_0 \in J$ war, existiert der Limes $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t)$ für alle $t \in I$ und für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$ konvergiert die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ gleichmäßig auf J gegen die Funktion $\varphi : I \rightarrow K^n, t \mapsto \varphi(t)$. Nach Satz 2.17 ist φ stetig und für alle $t \in I$ gilt mit $J = [\min(t, t_0), \max(t, t_0)]$

$$\left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_k(s))) ds \right\| \leq L(J) \left\| \int_{t_0}^t (\varphi(s) - \varphi_k(s)) ds \right\| \xrightarrow{k} 0.$$

Folglich gilt für alle $t \in I$

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(c + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds \right) = c + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Also ist $\varphi : I \rightarrow K^n$ differenzierbar mit $\varphi(t_0) = c$ und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in I$. □

Bemerkung 12.4. Sei $f : I \times K^n \rightarrow K^n$ stetig. Erfüllt die Funktion f für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$ eine globale Lipschitz-Bedingung auf $J \times K^n$, so hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = c$$

für alle $(t_0, c) \in I \times K^n$ eine eindeutige Lösung $\varphi : I \rightarrow K^n$. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 12.3.

Satz 12.5. Sei $A : I \rightarrow M(n \times n, K)$ stetig.

(a) Die Menge der Lösungen des durch A gegebenen homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$L_H = \{\varphi : I \rightarrow K^n; \varphi \text{ ist Lösung von } y' = A(t)y\}$$

ist ein K -Vektorraum (bzgl. punktweiser Addition und skalarer Multiplikation) mit $\dim L_H = n$.

(b) Für $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in L_H$ sind äquivalent:

- (i) $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in L_H$ sind linear unabhängig,
- (ii) es gibt ein $t_0 \in I$ so, dass $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_r(t_0)$ in K^n linear unabhängig sind,
- (iii) für alle $t \in I$ sind $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ in K^n linear unabhängig.

Beweis. Da $\varphi_0 \equiv 0$ zu L_H gehört und da mit $\varphi, \psi \in L_H$ und $\alpha \in K$ auch $\varphi + \psi$ und $\alpha\varphi$ zu L_H gehören, ist $L_H \subset \text{Abb}(I, K^n)$ ein Teilvektorraum.

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in L_H$. Offensichtlich gelten in Teil (b) die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Gilt $\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$, so folgt aus dem Eindeigkeitsteil von Satz 12.3, dass $\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i$ auf ganz I mit der trivialen Lösung $\varphi_0 \equiv 0$ übereinstimmt. Also ist Teil (b) gezeigt.

Nach dem Existenzteil von Satz 12.3 gibt es zu jedem beliebig gewählten Punkt $t_0 \in I$ Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ mit $\varphi_i(t_0) = e_i$ für $i = 1, \dots, n$. Nach Teil (b) sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ linear unabhängig. Also ist $\dim(L_H) \geq n$. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (iii) in Teil (b) zeigt, dass auch $\dim(L_H) \leq n$ gilt. $\square$

Definition 12.6. Sei $A : I \rightarrow M(n \times n, K)$ stetig und sei L_H wie in Satz 12.5 definiert. Ein *Lösungsfundamentalsystem* der Differentialgleichung

$$y' = A(t)y$$

ist definitionsgemäß eine Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ des Lösungsraums L_H .

Bemerkung 12.7. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ Lösungen von

$$y' = A(t)y$$

wie in Satz 12.5. Sei $\varphi_j(t) = (\varphi_{ij}(t))_{i=1}^n$ mit Koordinatenfunktionen $\varphi_{ij} : I \rightarrow K$ und sei $\Phi = (\varphi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, C(I, K))$. Nach Satz 12.5 ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem genau dann, wenn für ein $t \in I$ (oder äquivalent für alle $t \in I$)

$$\det \Phi(t) = \det(\varphi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

ist. In diesem Fall gilt

$$L_H = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\} = \left\{ \Phi(\alpha_i)_{i=1}^n; (\alpha_i)_{i=1}^n \in K^n \right\}.$$

Hierbei steht $\Phi(\alpha_i)_{i=1}^n$ für die Funktion $I \rightarrow K^n$, $t \mapsto (\varphi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}(\alpha_i)_{i=1}^n$.

Sind $\varphi_j = (\varphi_{ij})_{i=1}^n$ für $j = 1, \dots, n$ Funktionen in $C(I, K^n)$, so identifizieren wir im Folgenden das Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ mit der Matrix

$$\Phi = (\varphi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, C(I, K)),$$

die die Spaltenvektoren φ_j ($j = 1, \dots, n$) besitzt.

Bemerkung 12.8. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ fest. Das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y_1' = \omega y_2$$

$$y_2' = -\omega y_1$$

lautet in Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Die zwei Lösungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}, \psi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

bilden ein Lösungsfundamentalsystem, da

$$\det(\varphi(t), \psi(t)) = \det \begin{pmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Der Lösungsraum besteht genau aus den Funktionen

$$c\varphi + d\psi \quad (c, d \in K).$$

Um den Lösungsraum eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems zu berechnen, genügt es, den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems zu bestimmen und eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu finden.

Lemma 12.9. Seien $A : I \rightarrow M(n \times n, K), b : I \rightarrow K^n$ stetig. Sei

$$\psi_0 \in L_I = \{\varphi : I \rightarrow K^n; \varphi \text{ löst die Gleichung } y' = A(t)y + b(t)\}$$

eine Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems. Dann ist

$$L_I = \psi_0 + L_H (= \{\psi_0 + \varphi; \varphi \in L_H\}),$$

wobei $L_H = \{\varphi : I \rightarrow K^n; \varphi \text{ löst } y' = A(t)y\}$ der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems ist.

Beweis. Sei $\psi_0 \in L_I$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Für jede andere Lösung $\psi \in L_I$ ist dann

$$\psi = \psi_0 + (\psi - \psi_0) \in \psi_0 + L_I.$$

Umgekehrt gilt für jedes $\varphi \in L_H$ und alle $t \in I$

$$\begin{aligned} (\psi_0 + \varphi)'(t) &= \psi_0'(t) + \varphi'(t) = A(t)\psi_0(t) + b(t) + A(t)\varphi(t) \\ &= A(t)(\psi_0(t) + \varphi(t)) + b(t). \end{aligned}$$

Also ist auch $\psi_0 + L_H \subset L_I$. □

Spezielle Lösungen des inhomogenen Systems erhält man genau wie im Falle $n = 1$ (vgl. Satz 11.4).

Satz 12.10. (Variation der Konstanten) *Seien $A : I \rightarrow M(n \times n, K)$, $b : I \rightarrow K^n$ stetige Funktionen und sei*

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in M(n \times n, C(I, K))$$

ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(t)y.$$

Für $t_0 \in I$ und $c \in K^n$ ist die Funktion $\psi : I \rightarrow K^n$,

$$\psi(t) = \Phi(t)u(t),$$

wobei $u : I \rightarrow K^n$ definiert ist durch

$$u(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s)ds + \Phi(t_0)^{-1}c,$$

die eindeutige Lösung des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = c.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 10.7 ist

$$I \rightarrow GL(n, K), t \mapsto \Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

eine matrixwertige Funktion mit differenzierbaren Koeffizienten $\varphi_{ij} : I \rightarrow K$. Wir definieren $\Phi'(t) = (\varphi'_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, K)$ für $t \in I$. Dann ist

$$\Phi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)) = (A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)) = A(t)\Phi(t)$$

für $t \in I$. Da $I \rightarrow M(n \times n, K), t \mapsto \Phi(t)^{-1}$ stetig ist, ist die im Satz definierte Funktion u differenzierbar mit

$$u'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t) \quad (t \in I).$$

Dann ist auch die Funktion $\psi : I \rightarrow K^n, \psi(t) = \Phi(t)u(t)$ differenzierbar und löst wegen

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = A(t)\Phi(t)u(t) + b(t) \\ &= A(t)\psi(t) + b(t) \end{aligned}$$

das inhomogene System. □

Beispiel 12.11. Das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 + t \\ y'_2 &= -y_1 \end{aligned}$$

hat in Matrix-Schreibweise die Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel 12.8 ist

$$\Phi(t) = \left(\begin{array}{c|c} \sin t & \cos t \\ \hline \cos t & -\sin t \end{array} \right)$$

ein Lösungsfundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems. Es ist

$$\Phi(t)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \sin t & \cos t \\ \hline \cos t & -\sin t \end{array} \right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Lösung ψ_c des inhomogenen Systems mit Anfangswert $\psi_c(0) = c \in \mathbb{R}^2$ ist (Satz 12.10)

$$\psi_c(t) = \Phi(t)u_c(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \int_0^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds + \Phi(0)^{-1} c \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sin s - s \cos s)|_0^t \\ (s \sin s + \cos s)|_0^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\psi_c(t) = \Phi(t)u_c(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 12.9 lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in K).$$

C Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Seien $a_i : I \rightarrow K (i = 0, \dots, n-1)$ und $b : I \rightarrow K$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y^{(1)} + a_0(t)y = 0$$

homogene und

$$(**) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y^{(1)} + a_0(t)y = b(t)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung. Man nennt $(*)$ die zu $(**)$ gehörige homogene Gleichung.

Satz 12.12. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

- (a) $L_H = \{\varphi : I \rightarrow K; \varphi \text{ löst die homogene Gleichung } (*)\}$ ist ein n -dimensionaler K -Vektorraum.
- (b) Sei $\psi_0 \in L_I = \{\psi : I \rightarrow K; \psi \text{ löst die inhomogene Gleichung } (**)\}$. Dann ist $L_I = \psi_0 + L_H$.
- (c) Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ sind linear unabhängig genau dann, wenn für ein $t \in I$ (äquivalent für alle $t \in I$) gilt

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1^{(1)}(t) & \varphi_2^{(1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Man nennt $W(t)$ die Wronski-Determinante von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Beweis. Wie in Teil C von §11 folgt, dass die K -lineare Abbildung

$$\{\varphi; \varphi : I \rightarrow K \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar}\} \rightarrow \{\Phi; \Phi : I \rightarrow K^n \text{ ist differenzierbar}\},$$

$$\varphi \mapsto \Phi = (\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)})$$

einen Vektorraumisomorphismus $T : L_H \rightarrow \mathcal{L}_H$ zwischen den Lösungsräumen L_H von $(*)$ und dem Lösungsraum $\mathcal{L}_H$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\dots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_{n-1}(t)y_{n-1} - a_{n-2}(t)y_{n-2} - \dots - a_0(t)y_0 \end{aligned}$$

induziert. Also folgt Teil (a) aus Teil (a) von Satz 12.5. Teil (b) gilt offensichtlich. Teil (c) folgt mit Teil (b) von Satz 12.5, da $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $T\varphi_1, \dots, T\varphi_n \in \mathcal{L}_H$ linear unabhängig sind.

□

13 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Man nennt

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir schreiben im Folgenden $C^k(I)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) für den $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemma 13.1. (a) *Der Lösungsraum der obigen homogenen Gleichung*

$$L_H = \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ } n\text{-mal differenzierbar; } \varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \dots + a_1\varphi^{(1)} + a_0\varphi = 0\}$$

ist ein n -dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

(b) *Es ist $L_H \subset C^\infty(I)$.*

Beweis. Teil (a) ist ein Spezialfall von Satz 12.12. Ist $\varphi \in L_H$, so folgt induktiv, dass $\varphi \in C^{n+k}(I)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist gezeigt, dass $\varphi \in C^{n+k}(I)$ ist, so folgt im Induktionsschritt, dass

$$\varphi^{(n)} = -a_{n-1}\varphi^{(n-1)} - \dots - a_0\varphi \in C^{k+1}(I)$$

gilt. □

Erstes Ziel ist es, ein Lösungsfundamentalsystem zu bestimmen.

Satz 13.2. *Sei $p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ ($n \geq 1$) ein Polynom mit Linearfaktorzerlegung*

$$p = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_i} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \text{ paarweise verschieden, } k_i \in \mathbb{N}^*).$$

Dann bilden die Funktionen $\varphi_{ij} : I \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x} \quad (i = 1, \dots, r \text{ und } j = 0, \dots, k_i - 1)$$

ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0.$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Sei $D : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ die durch

$$D(f) = \frac{d}{dx}f$$

definierte lineare Abbildung. Für $p = \sum_{i=0}^s a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ sei

$$p(D) = \sum_{i=0}^s a_i D^i \quad (D^0 = \text{id}, D^i = D \circ \dots \circ D \text{ } i \text{ - mal}).$$

Dann ist

$$\mathbb{C}[x] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(I)) \quad (= \{A; A : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \text{ ist } \mathbb{C} - \text{linear}\}), p \mapsto p(D)$$

ein $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus, das heißt eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit $(pq)((D) = p(D)q(D)$ für alle $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Für $\varphi \in C^\infty(I)$ und $p \in \mathbb{C}[x]$ benutzen wir die vereinfachende Schreibweise

$$p(D)\varphi(x) = (p(D)\varphi)(x) \quad (x \in I).$$

Lemma 13.3. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Für $p \in \mathbb{C}[x]$ gilt

$$p(D)e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x} \quad (x \in I).$$

(b) Für $f \in C^\infty(I)$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(D - \lambda)^k(f(x)e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x} \quad (x \in I).$$

Beweis. (a) Sei $\lambda = s + it$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Es genügt zu zeigen, dass

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (x \in I),$$

gilt. Dies erhält man so

$$\begin{aligned} De^{\lambda x} &= D(e^{sx}(\cos tx + i \sin tx)) = D(e^{sx} \cos tx) + iD(e^{sx} \sin tx) \\ &= (s \cos tx - t \sin tx)e^{sx} + i(s \sin tx + t \cos tx)e^{sx} \\ &= (s + it)e^{(s+it)x} = \lambda e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

(b) Teil (b) folgt induktiv. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ gezeigt, so folgt mit der Produktregel und Teil (a), dass

$$(D - \lambda)^{k+1}(f(x)e^{\lambda x}) = (D - \lambda)(f^{(k)}(x)e^{\lambda x}) = f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x} + f^{(k)}(x)(D - \lambda)e^{\lambda x} = f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x}$$

für alle $x \in I$ gilt.

□

Als Anwendung von Teil (b) von Lemma 13.3 erhalten wir, dass in der Situation von Satz 13.2 gilt

$$\varphi_{ij} \in L_H \quad (i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, k_i - 1).$$

Um dies zu sehen, setze man

$$q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (x - \lambda_j)^{k_j} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Dann ist $p(x) = q_i(x)(x - \lambda_i)^{k_i}$ für $i = 1, \dots, r$ und

$$p(D)(x^j e^{\lambda_i x}) = q_i(D)((D - \lambda_i)^{k_i}(x^j e^{\lambda_i x})) = q_i(D)\left(\frac{d^{k_i}}{dx^{k_i}}(x^j) e^{\lambda_i x}\right) = 0$$

für alle $j = 0, \dots, k_i - 1$. Wegen $\dim_{\mathbb{C}}(L_H) = n = k_1 + \dots + k_r$ genügt es, die lineare Unabhängigkeit der Funktionen

$$\varphi_{ij} \quad (i = 1, \dots, r \text{ und } j = 0, \dots, k_i - 1)$$

zu zeigen, um den Beweis von Satz 13.2 zu beenden.

Lemma 13.4. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq \mu$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein Polynom $q = q_j \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(q) = j$ und*

$$(D - \mu)^k(x^j e^{\lambda x}) = q(x) e^{\lambda x}.$$

Beweis. Für $k = 0$ gilt die Aussage offensichtlich. Sind für ein $k \in \mathbb{N}$ Koeffizienten $a_0, \dots, a_j \in \mathbb{C}$ mit $a_j \neq 0$ gefunden mit $(D - \mu)^k(x^j e^{\lambda x}) = \left(\sum_{i=0}^j a_i x^i\right) e^{\lambda x}$ für alle x , so folgt mit Teil (b) von Lemma 13.3

$$(D - \mu)^{k+1}(x^j e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^j a_i (D - \mu)(x^i e^{\lambda x}) = \left(\sum_{i=0}^j a_i (\lambda - \mu) x^i + \sum_{i=1}^j a_i i x^{i-1}\right) e^{\lambda x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

□

Korollar 13.5. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq \mu$ und sei $k \in \mathbb{N}$.*

(a) Für jedes Polynom $r \in \mathbb{C}[x]$ gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(q) = \deg(r)$ und

$$(D - \mu)^k(r(x)e^{\lambda x}) = q(x)e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $q \neq 0$, wenn $r \neq 0$ ist.

(b) Ist $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $p(\lambda) \neq 0$, so gibt es für jedes Polynom $r \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(q) = \deg(r)$ und

$$p(D)(r(x)e^{\lambda x}) = q(x)e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis. Teil (a) folgt direkt aus Lemma 13.4. Zum Beweis von Teil (b) zerlege man p in Linearfaktoren

$$p(x) = \alpha \prod_{i=1}^s (x - \mu_i)^{k_i}$$

und wende Teil (a) s -mal an. □

Die behauptete lineare Unabhängigkeit der Funktionen

$$x^j e^{\lambda_i x} \quad (i = 1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, k_i - 1)$$

und damit der fehlende Teil des Beweises von Satz 13.2 folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 13.6. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und sind $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{C}[x]$ beliebige Polynome mit

$$\sum_{i=1}^r p_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \quad \text{für alle } x \in I,$$

so ist $p_i = 0$ für $i = 1, \dots, r$.

Beweis. Für $r = 1$ gilt die Behauptung offensichtlich. Sei $r \geq 2$ und sei die Behauptung gezeigt $r-1$. Seien $p_1, \dots, p_r$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ wie im Lemma. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \deg(p_r)$. Mit Lemma 13.3(b) folgt

$$0 = (D - \lambda_r)^k \left(\sum_{i=1}^r p_i(x) e^{\lambda_i x} \right) = \sum_{i=1}^{r-1} (D - \lambda_r)^k (p_i(x) e^{\lambda_i x})$$

für $x \in I$. Nach Korollar 13.5(a) existieren Polynome $q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(q_i) = \deg(p_i)$ und

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} q_i(x) e^{\lambda_i x} \quad (x \in I).$$

Nach Induktionsveraussetzung ist $q_i = 0$ für $i = 1, \dots, r-1$. Dann sind aber auch $p_1 = \dots = p_{r-1} = 0$ und daher auch $p_r = 0$. $\square$

Der inhomogene Fall

Bemerkung 13.7. Für jedes Polynom

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x] \quad (n \geq 1)$$

und jede stetige Funktion $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ erhält man eine spezielle Lösung von

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b(t),$$

indem man mit Satz 13.2 ein Lösungsfundamentalsystem bestimmt und dann durch Variation der Konstanten (Satz 12.10) eine spezielle Lösung berechnet. Nach Satz 12.12 erhält man auf diese Weise den gesamten Lösungsraum der inhomogenen Gleichung (*).

Für spezielle Inhomogenitäten hilft der folgende Satz.

Satz 13.8. Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom wie in der letzten Bemerkung und $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$b(x) = q(x)e^{\mu x} \quad (\mu \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}).$$

Sei $m = m_q = \deg(q) \in \mathbb{N}$ und $k = k_p \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit von μ als Nullstelle von p . Dann hat die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$p(D)y = b$$

eine spezielle Lösung der Gestalt

$$\varphi(x) = r(x)e^{\mu x},$$

wobei $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit $\deg(r) = \deg(q) + k_p = m + k$ ist.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{C}[x]$ mit $\tilde{p}(\mu) \neq 0$ und

$$p(x) = \tilde{p}(x)(x - \mu)^k.$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach m . Für $m = 0$ ist

$$b(x) = ce^{\mu x} \quad (c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Dann folgt mit Lemma 13.3

$$p(D) \left(\frac{c}{k! \tilde{p}(\mu)} x^k e^{\mu x} \right) = \tilde{p}(D) (D - \mu)^k \left(\frac{c}{k! \tilde{p}(\mu)} x^k e^{\mu x} \right) = \tilde{p}(D) \left(\frac{c}{\tilde{p}(\mu)} e^{\mu x} \right) = c e^{\mu x}.$$

Sei die Behauptung gezeigt für den Fall $\deg(q) \leq m - 1$ und sei $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit $\deg(q) = m$. Dann folgt mit Lemma 13.3 (b) und Korollar 13.5 (b)

$$p(D)(x^{m+k} e^{\mu x}) = \tilde{p}(D)(D - \mu)^k (x^{m+k} e^{\mu x}) = s(x) e^{\mu x},$$

wobei $s \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit $\deg(s) = m$ ist. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, dass $q_1 = q - cs$ Grad $\leq m - 1$ hat. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $q \neq cs$ ist, denn sonst kann man $r(X) = cx^{m+k}$ wählen. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Polynom $r_1 \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r_1) \leq m - 1 + k$ und

$$p(D)(r_1(x) e^{\mu x}) = q_1(x) e^{\mu x}.$$

Dann ist aber

$$q(x) e^{\mu x} = (q_1(x) + cs(x)) e^{\mu x} = p(D)((r_1(x) + cx^{m+k}) e^{\mu x})$$

und $\deg(r_1(x) + cx^{m+k}) = m + k$. □

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Wir suchen alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!}$$

in $M(n \times n, \mathbb{C})$, denn $M(n \times n, \mathbb{C})$ ist vollständig und wegen

$$\left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|tA\|^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ absolut konvergent.

Lemma 13.9. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

(a) Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M(n \times n, \mathbb{C}), \quad t \mapsto e^{tA}$$

ist differenzierbar, das heißt definitionsgemäß, dass alle Koeffizientenfunktionen differenzierbar sind.

(b) Die Funktionen

$$\varphi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi_j(t) = j\text{-te Spalte von } \varphi(t) \quad (1 \leq j \leq n)$$

bilden ein Lösungsfundamentalsystem des linearen homogenen Systems $y' = Ay$.

Beweis. Seien $\pi_{ij} : M(n \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_{\mu\nu}) \mapsto x_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$ die Koordinatenprojektionen.

(a) Die Funktionen $\varphi_{ij} = \pi_{ij} \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzen die Potenzreihendarstellungen

$$\varphi_{ij}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{ij} \left(\sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_{ij}(A^k)}{k!} t^k$$

und

$$\varphi'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi_{ij}(A^k)}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_{ij}(A^{k+1})}{k!} t^k = \pi_{ij} \left(A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) = \pi_{ij}(A e^{tA})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$\varphi'(t) \quad (:= (\varphi'_{ij}(t))_{i,j}) = A e^{tA} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) Für $j = 1, \dots, n$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi'_{nj}(t) \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } (A e^{tA}) = A \varphi_j(t).$$

Da $\varphi_1(0) = e_1, \dots, \varphi_n(0) = e_n$ linear unabhängig sind, bilden die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nach Satz 12.5 ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = Ay$. □

Alle Aussagen von Lemma 13.9 bleiben gültig, wenn man überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt.

Korollar 13.10. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Gibt es eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren u_j der Matrix A zu Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{C}$, so bilden die Funktionen

$$\varphi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} u_j$$

ein Lösungsfundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Beweis. Nach Bemerkung 12.7 besteht der Lösungsraum L_H des homogenen Systems $y' = Ay$ genau aus den Funktionen

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad t \mapsto e^{tA} \left(\sum_{j=1}^n c_j u_j \right) = \sum_{j=1}^n c_j (e^{tA} u_j) \quad ((c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n).$$

Wegen $\dim_{\mathbb{C}}(L_H) = n$ und

$$e^{tA} u_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} u_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(t\lambda_j)^k}{k!} u_j = e^{t\lambda_j} u_j = \varphi_j(t)$$

ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem des Systems. □

Bemerkung 13.11. (a) Zu $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ existiert eine Basis aus Eigenvektoren genau dann, wenn die Matrix A diagonalisierbar ist, das heißt eine Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert so, dass die Matrix $B = S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(b) In der linearen Algebra zeigt man, dass zu jeder Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert so, dass $B = S^{-1}AS$ obere Dreiecksgestalt hat.

(c) Sind $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $B = S^{-1}AS$, so löst eine Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Differentialgleichung $y' = Ay$ genau dann, wenn die Funktion $\psi = S^{-1}\varphi$ Lösung der Differentialgleichung $y' = By$ ist. Ist etwa $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ für alle $t \in I$, so folgt $(S^{-1}\varphi)'(t) = S^{-1}\varphi'(t) = (S^{-1}AS)S^{-1}\varphi(t)$ für alle $t \in I$.

Also genügt es, lineare Differentialgleichungssysteme

$$y' = Ay$$

zu lösen mit Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, die obere Dreiecksgestalt haben. Ein solches

System hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Für $x_0 \in I$ und $d = (d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ erhält man folgendermaßen eine Lösung von

$$(*) \quad y' = Ay, \quad y(x_0) = d.$$

Definiere

$$\varphi_n(x) = \alpha_n e^{a_{nn}x}, \quad \alpha_n = e^{-a_{nn}x_0} d_n.$$

Im nächsten Schritt löse man das Anfangswertproblem

$$y_{n-1}' - a_{n-1,n-1}y = a_{n-1,n}\alpha_n e^{a_{nn}x}, \quad y_{n-1}(x_0) = d_{n-1}.$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 13.8 ist $m = 0, \mu = a_{nn}$ und

$$\text{für } a_{nn} \neq a_{n-1,n-1} \quad : \quad k = 0, \quad \tilde{p} = p = x - a_{n-1,n-1},$$

$$\text{für } a_{nn} = a_{n-1,n-1} \quad : \quad k = 1, \quad \tilde{p} = 1.$$

Damit erhält man eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (*)

$$\text{für } a_{nn} \neq a_{n-1,n-1} \quad : \quad \varphi(x) = \frac{a_{n-1,n}\alpha_n}{a_{nn} - a_{n-1,n-1}} e^{a_{nn}x},$$

$$\text{für } a_{nn} = a_{n-1,n-1} \quad : \quad \varphi(x) = a_{n-1,n}\alpha_n x e^{a_{nn}x}.$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung (*) haben somit die Gestalt

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x) + \alpha e^{a_{n-1,n-1}x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Wähle $\alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ so, dass $\varphi_{\alpha_{n-1}}(x_0) = d_{n-1}$ ist und setze $\varphi_{n-1} = \varphi_{\alpha_{n-1}}$.

Sind $\varphi_n, \dots, \varphi_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-2$) gewählt so, dass jedes φ_j ($j = i+1, \dots, n$) Linearkombination von Funktionen der Form

$$x^m e^{a_{\nu\nu}x} \quad (0 \leq m \leq n-j, j \leq \nu \leq n)$$

ist, so wähle man im nächsten Schritt mit Satz 13.8 eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y_i' - a_{ii}y_i = \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\varphi_j.$$

Dann hat jede Lösung dieser Differentialgleichung die Form

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x) + \alpha e^{a_{ii}x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Wähle $\alpha_i \in \mathbb{C}$ so, dass $\varphi_{\alpha_i}(x_0) = d_i$ ist und setze

$$\varphi_i(x) = \varphi(x) + \alpha_i e^{a_{ii}x}.$$

Dieses Verfahren führt nach n Schritten zum Ziel.

Satz 13.12. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und sei

$$\chi(x) = \prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{k_i}$$

das charakteristische Polynom von A mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$. Sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay.$$

Dann sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Linearkombinationen der Funktionen

$$t^m e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, \dots, r \text{ und } 0 \leq m < k_i).$$

Beweis. Da sich die Eigenwerte und das charakteristische Polynom nicht ändern, wenn man A ersetzt durch eine Matrix der Form $S^{-1}AS$ ($S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$) dürfen wir annehmen, dass $a_{ij} = 0$ ist für alle $i > j$. In diesem Fall gilt

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \{a_{ii}; i = 1, \dots, n\}$$

und k_i ist die Anzahl aller $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{jj} = \lambda_i$. Damit folgt die Behauptung aus dem obigen induktiven Verfahren. $\square$

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2018.

[FoII] Forster, O., Analysis 2, Vieweg, Braunschweig, 1979.

[Ka] Kaballo, W., Einführung in die Analysis II, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997.

[La] Lang, S., Real Analysis, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1969.