UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 1 Abgabetermin: 17.04.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (1,5+2,5 = 4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf V. Dann heißt d *translationsinvariant*, falls $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ für alle $x, y, z \in V$ gilt, und *homogen*, falls $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ für alle $x, y \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so definiert $d : V \times V \to \mathbb{R}, d(x,y) = \|x - y\|$ eine translationsinvariante, homogene Metrik auf V.

(b) Ist d eine translationsinvariante, homogene Metrik auf V, so existiert eine Norm $\|\cdot\|_d$ auf V mit $\|x - y\|_d = d(x,y)$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist. Es sei $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ ist $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$. (*Hinweis: Betrachten Sie $\|\lambda x + y\|^2$ mit $\lambda = -\frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|^2}$.*)

(b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf V.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Für $x = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < \infty$ sei $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. In der Vorlesung wird gezeigt, dass für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

(a) Sind $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x = (x_1 \ldots, x_n), y = (y_1 \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \,.$$

(b) Ist $1 \leq p < \infty$, so ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.
(*Hinweis: Um die Dreiecksungleichung für $p > 1$ zu beweisen, betrachten Sie zu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $z = (|u_1 + v_1|^{p-1}, \ldots, |u_n + v_n|^{p-1})$ und wenden Sie Teil (a) an.*)

Aufgabe 4 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\delta(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(*Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t}$ *auf Monotonie.*)

(b) Sei $d(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{R})$ die übliche Metrik auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ genau dann offen bezüglich d ist, wenn sie offen bezüglich δ ist.
