UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 10 Abgabetermin: 19.06.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \notin \{0, \sqrt[3]{4}\}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von x_0 und eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ existieren so, dass $(x, f(x))$ die Gleichung $(*)$ löst für jedes $x \in U$. Berechnen Sie $f'(x)$ in Abhängigkeit von x und $f(x)$ für x in einer geeigneten Umgebung von x_0.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass keine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, die injektiv ist. (*Hinweis: Mit f wäre auch $f(0, \cdot)$ injektiv.*)

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1\}$ und sei

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy.$$

Entscheiden Sie, ob $\min h(M)$ und $\max h(M)$ existieren. Wenn ja, an welchen Stellen in M werden diese Werte angenommen?

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ und $h : E \to \mathbb{R}, h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Bestimmen Sie alle relativen und absoluten Extrema von h in E.

(bitte wenden)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt offen, *falls für jede offene Menge $V \subset U$ das Bild $f(V) \subset \mathbb{R}^m$ offen ist.*

Aufgabe 45* **(1*+2*+1*=4* Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Abbildung so, dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung f ist offen.

(b) Die Funktion $U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x)\|$ besitzt kein Maximum.

(c) Ist U beschränkt und f stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar, so besitzt die Funktion $\overline{U} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x)\|$ ein Maximum und dieses wird auf ∂U angenommen.