UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Blatt 11 Abgabetermin: 26.06.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung der Kurve $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ zum Ursprung.

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die zweite Ableitung der durch

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^a \sin(xy)\, dy$$

definierten Funktion, einmal durch Differenzieren nach dem Parameter x, einmal durch explizites Berechnen des Integrals und anschließendes Differenzieren. Zeigen Sie durch Vergleich beider Ausdrücke, dass

$$\int_0^a y^2 \sin(y)\, dy = (2 - a^2)\cos(a) + 2a\sin(a) - 2.$$

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig. Zeigen Sie:

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx\right) \geq (b - a)^2.$$

(*Hinweis: Zeigen Sie zunächst* $\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right) \geq 1$.)

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx, \quad F^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

wohldefiniert sind und dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, aber $F'(0) \neq F^*(0)$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 50* **(3* Punkte)**

Zeigen Sie durch Berechnung der Ableitung, dass die durch

$$g(x) := \int_0^5 (1 + x^3 t^4)^2 \, dt \quad (x \in [0,1])$$

definierte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf $[0,1]$ monoton wachsend ist.