UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 12 Abgabetermin: 3.07.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 51 (2+2 = 4 Punkte)

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2t+t^2)}$, $\quad y(2) = 1$,
(*Hinweis: Nach Analysis 1 gibt es* $A, B \in \mathbb{R}$ *mit* $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$.)

(b) $y' = \frac{y \log y}{\sin t}$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = e^e$.
(*Hinweis: Leiten Sie die Funktion* $G :]0, \pi[\to \mathbb{R}, G(t) = \log \frac{\sin t}{1+\cos t}$ *ab.*)

Aufgabe 52 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Erraten Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = ty + 1 - t^2$, $y(0) = 0$ auf $\mathbb{R}$, und zeigen Sie, dass nur eine Lösung existiert.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = ty + 1 - t^2. \tag{1}$$

(*Hinweis: Bestimmen Sie in* (*b*) *zunächst alle Lösungen der Differentialgleichung* $y' = ty$ *und beachten Sie, dass die Differenz zweier Lösungen von* (1) *eine Lösung hiervon ist.*)

Aufgabe 53 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 0$ in jedem Intervall $[-a, a]$ $(a > 0)$ unendlich viele Lösungen hat.
(*Hinweis: Für* $0 < \epsilon < a$ *hat das Anfangswertproblem* $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y(c) = 0$ *nicht-triviale Lösungen der Form* $y(t) = c(t - \epsilon)^d$ *mit geeigneten Konstanten* c, d.)

(b) Zeigen Sie direkt (also ohne (*a*) zu benutzen), dass die Funktion $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$ in keiner Umgebung von $(0, 0)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

(bitte wenden)

Aufgabe 54 **(4* + 4 Punkte)**

Sei $a > 0$ und $I = [0, a]$.

(a) * Zeigen Sie, dass

$$X = \{u \in C(I);\ \sup_{0<t\leq a} \frac{|u(t)|}{t} < \infty\}$$

versehen mit der Norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, \|u\| = \sup_{0<t\leq a} \frac{|u(t)|}{t}$ ein vollständiger normierter Raum ist.

(b) Sei $\nu \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gebe ein $k \in [0, 1[$, so dass gilt:

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq \frac{k}{t}|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq a \text{ und alle } y, \tilde{y} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y) \quad \text{und} \quad y(0) = \nu$$

genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(Hinweis: Wenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 8.4) auf die Abbildung $T : X \to X, (Tu)(t) = \int_0^t f(s, \nu + u(s))ds$ *mit* X *aus (a) an.)*