**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

# Übungen zur Vorlesung
# Analysis II

Sommersemester 2019

**Blatt 13** Abgabetermin: 10.07.2019, vor der Vorlesung

---

## Aufgabe 55 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ und seien $t_0, \nu \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = (a^2 + t^2)(b^2 + y^2), \quad y(t_0) = \nu.$$

---

## Aufgabe 56 (2+2 = 4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' + y \sin t = \sin 2t$,
(*Hinweis: Benutzen Sie, dass* $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt.*)

(b) $y' - 3y \tan t = 1$.
(*Hinweis: Benutzen Sie, dass* $\cos^3(t) = \cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt.*)

---

## Aufgabe 57 (3+2 = 5 Punkte)

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $t_0 \in I$ und $\nu > 0$. Weiter seien $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$. Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ gibt mit $t_0 \in I'$, so dass das Anfangswertproblem

$$y' + g(t)y + h(t)y^\alpha = 0, \quad y(t_0) = \nu \tag{*}$$

genau eine Lösung in $I'$ besitzt und geben Sie diese an.
(*Hinweis: Eine Funktion* $\varphi : I' \to ]0, \infty[$ *löst die Differentialgleichung (*) genau dann, wenn* $\varphi^{1-\alpha}$ *ein geeignetes lineares Anfangswertproblem löst.*)

(b) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{y}{1+t} + (1+t)y^4 = 0, \quad y(0) = 1.$$

(*Hinweis: Wenn Sie* (a) *nicht gezeigt haben, verwenden Sie den Hinweis aus* (a) *in diesem speziellen Fall.*)

**(bitte wenden)**

**Aufgabe 58** **(2+2 = 4 Punkte)**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter sei $\phi \in C^1(I)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + g(t)y + h(t)y^2 = k(t). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi \not\equiv \phi$ eine Lösung von (1) auf $I$, so gilt $\varphi = \phi + \frac{1}{\psi}$ mit einer Lösung $\psi$ von:

$$y' = (g(t) + 2\phi(t)h(t))y + h(t). \tag{2}$$

(b) Ist $\psi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) mit $0 \notin \psi(I)$, so ist $\varphi = \phi + \frac{1}{\psi}$ eine Lösung von (1).