UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 14 Abgabetermin: -

Die folgenden Aufgaben dienen nur der Klausurvorbereitung und werden weder abgegeben noch korrigiert. Eine Besprechung des Blattes wird am 22.07.2019, 9 Uhr in Hörsaal I von Manuel Kany angeboten werden.

Aufgabe 59

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X so, dass es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 60

Seien $(X, d), (Y, \tilde{d})$ metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Seien K, L nichtleere, disjunkte Teilmengen von X. Zeigen Sie: Ist K kompakt und ist L abgeschlossen in X, so ist

$$\inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in L\} > 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass f stetig ist genau dann, wenn $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ für alle $A \subseteq X$ gilt.
(Hinweis: Erinnern Sie sich für die Rückrichtung daran, dass $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$ und $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für alle $B \subseteq Y$ gilt. Sie dürfen außerdem benutzen, dass f stetig ist genau dann, wenn $f^{-1}(B) \subseteq X$ abgeschlossen ist für alle $B \subseteq Y$ abgeschlossen.)

Aufgabe 61

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven f, g rektifizierbar sind, und berechnen Sie ihre Bogenlänge:

(a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})),$

(b) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^{2t}, \frac{2}{3}e^{3t}).$

(bitte wenden)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, *falls $tx \in M$ für alle $x \in M$ und $t \in [0,1]$ gilt.*

Aufgabe 62

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene sternförmige Menge. Zeigen Sie, dass zu $f \in C^k(U)$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ Funktionen $f_1, \dots, f_n \in C^{k-1}(U)$ existieren mit

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. (*Hinweis: Berechnen Sie für festes $x \in U$ die Ableitung $\frac{d}{dt} f(tx)$.*)

Aufgabe 63

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit und berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung in allen Punkten, in denen sie existieren.

(b) Untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit und berechnen Sie $Df(x,y)$ in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 64

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 3\}$. Zeigen Sie, dass $\min f(M)$ und $\max f(M)$ existieren und berechnen Sie alle Punkte $x \in M$ bzw. $y \in M$ mit $f(x) = \min f(M)$ und $f(y) = \max f(M)$.
(*Zur Kontrolle: Offensichtlich gilt $\sqrt{\frac{3}{5}} < \sqrt{3}$.*)

Aufgabe 65

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1)$. Zeigen Sie, dass eine Umgebung U von $(-1,2)$ und eine Umgebung V von $(-2,10)$ existieren, so dass $g := f|_U$ ein C^∞-Diffeomorphismus von U auf V ist. Berechnen Sie $Dg^{-1}(-2,10)$.

Aufgabe 66

Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{\sin(\log(t))}{t} \frac{1}{e^y + 1}, \quad y(1) = 1.$$

(*Hinweis: Sollten Sie eine Umkehrfunktion bestimmen müssen, die Sie nicht explizit kennen, so reicht es, die gesuchte Lösung implizit durch eine Gleichung, die diese erfüllen muss, anzugeben.*)