UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 2 Abgabetermin: 24.04.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ gibt es abzählbar viele offene Mengen $U_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ mit

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Aufgabe 6 (1+1+1+1=4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

(c) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$,

(d) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Sei $C([0,1]) = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, versehen mit den punktweisen Verknüpfungen und der Supremumsnorm $\|f\|_{[0,1]} = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$. Weiter sei $(f_n)_n$ eine Folge in $C([0,1])$ und $(g_n)_n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bezüglich $\|\cdot\|_{[0,1]}$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

(b) Gilt $g_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bezüglich $\|\cdot\|_{[0,1]}$, so folgt $g_n' \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bezüglich $\|\cdot\|_{[0,1]}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $X = C[0,1]$ versehen mit der Metrik $d_\infty : X \times X, d_\infty(f,g) = \|f-g\|_{[0,1]}$ $(f,g \in C[0,1])$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{f \in C[0,1]; f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$$

abgeschlossen ist und bestimmen Sie den Rand ∂A von A.

Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V heißen äquivalent, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{c}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$$

für alle $x \in V$ gilt.

Aufgabe 9* (2* + 2* = 4* Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.

  (ii) Eine Menge $U \subset V$ ist genau dann offen bezüglich $\|\cdot\|_1$, wenn sie offen bezüglich $\|\cdot\|_2$ ist.

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch für zwei Metriken d_1 und d_2 auf V? D.h. sind d_1 und d_2 äquivalent, genau dann, wenn sie dieselben offenen Mengen haben?
(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4.*)