UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Blatt 3 Abgabetermin: 2.05.2019, vor 10:15 Uhr

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C[0,1], \|\cdot\|_{[0,1]})$ vollständig ist.

Aufgabe 11 (1,5+2,5=4 Punkte)

Sei $C^1[0,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und sei $\|f\|_{C^1} := \|f\|_{[0,1]} + \|f'\|_{[0,1]}$ für $f \in C^1[0,1]$. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_{C^1}$ definiert eine Norm auf $C^1[0,1]$.

(b) Durch die Vorschrift

$$(I\,f)(x) := \int_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1], f \in C[0,1])$$

wird eine wohldefinierte, stetig lineare Abbildung $I : (C[0,1], \|\cdot\|_{[0,1]}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1})$ definiert.

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, auf der zwei Metriken d_1 und d_2 definiert sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Jede d_1-offene Teilmenge von X ist auch d_2-offen.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $d_2 - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in X$ gilt $d_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(bitte wenden)

Aufgabe 13 **(2+2+1=5 Punkte)**

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $A : X \to X$ eine Abbildung, zu der eine Konstante $\theta \in [0, 1)$ existiert mit

$$d(A(x), A(y)) \leq \theta d(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Für $x_0 \in X$ sei die Folge $(x_n)_n$ in X rekursiv definiert durch $x_{n+1} = A(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $d(x_{n+k}, x_n) \leq \left(\sum_{j=n}^{n+k-1} \theta^j \right) d(x_1, x_0)$.

(b) Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen ein $a \in X$ mit $A(a) = a$.

(c) Der Fixpunkt a von A ist eindeutig bestimmt, d.h. gilt $A(\tilde{a}) = \tilde{a}$ für ein $\tilde{a} \in X$, so ist schon $\tilde{a} = a$.
