UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Blatt 4 Abgabetermin: 8.05.2019, vor der Vorlesung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $x \in X$ sei der Abstand von x zu M definiert durch $d(x, M) = \inf\{d(x, y); y \in M\}$.

Aufgabe 14 (2+3=5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $M, A, B \subset X$ nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $\overline{M} = \{x \in X \mid d(x, M) = 0\}$.

(b) Sind A, B abgeschlossen in X und ist $A \cap B = \emptyset$, so existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ so, dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A \quad \text{und} \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

(*Hinweis: Beispiel 2.15 aus der Vorlesung.*)

Aufgabe 15 (1+1+1+1=4 Punkte)

Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen kompakt sind:

(i) $K \cap L$,

(ii) $K \cup L$,

(iii) $K \times L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in K,\ y \in L\}$,

(iv) $K + L := \{x + y \mid x \in K,\ y \in L\}$.

Aufgabe 16 (1+3=4 Punkte)

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig genau dann, wenn $\overset{-1}{f}(A) \subset X$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$.

(b) Ist X kompakt und ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

(bitte wenden)

Aufgabe 17 **(4 Punkte)**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Menge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(K_j)_{j\geq 1}$ kompakter Mengen $K_j \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $K_j \subseteq \mathrm{Int}(K_{j+1})$ für alle $j \geq 1$ und

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Mengen der Form* $\{x \in \mathbb{R}^n; d(x, U^c) \geq \frac{1}{j}\}$.)

Aufgabe 18* **(1*+1*+2*=4* Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq Y \subset X$ versehen mit der Relativmetrik d_Y (Beispiel 1.3 aus der Vorlesung). Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge $U \subset Y$ ist genau dann offen in (Y, d_Y), wenn eine in (X, d) offene Teilmenge V existiert mit $U = V \cap Y$.

(b) Eine Teilmenge $A \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen in (Y, d_Y), wenn eine in (X, d) abgeschlossene Teilmenge B existiert mit $A = B \cap Y$.

(c) Eine Teilmenge $K \subset Y$ ist genau dann kompakt in (Y, d_Y), wenn sie kompakt in (X, d) ist.