UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 5 Abgabetermin: 15.05.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 19 (1+2+3=6 Punkte)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter k-Vektorraum ($k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$).

(a) Definieren Sie die Begriffe *Reihe*, *Konvergenz* und *absolute Konvergenz von Reihen* in Analogie zum Fall $V = \mathbb{R}$ und $\|\cdot\| = |\cdot|$.

(b) Zeigen Sie: Ist V vollständig, so impliziert die absolute Konvergenz einer Reihe in $(V, \|\cdot\|)$ ihre Konvergenz.

(c) Sei $V = M(n \times n, k)$ versehen mit der Norm $\|A\| = \sup\{\|Ax\|\,;\ x \in k^n,\ \|x\| \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M(n \times n, k)$ die Abschätzung $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ gilt und dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}$$

konvergiert.

(*Hinweis: Ist* $(M(n \times n, k), \|\cdot\|)$ *vollständig?*)

Aufgabe 20 (2+1=3 Punkte)

Seien $a, c > 0$. Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurven:

(a) $f_1 : [0, a] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t))$,

(b) $f_2 : [0, a] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{1}{2}t^4)$.

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t, t\sin(\frac{1}{t})) & \text{falls } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

eine Kurve definiert wird, die nicht rektifizierbar ist.

(*Hinweis: Skizzieren Sie die Kurve und betrachten Sie einen geeigneten Polygonzug.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 22 **(2+2=4 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Für $c \in (a, b)$ seien $f_c : [a, c] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto f(t)$ und $g_c : [c, b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto f(t)$. Zeigen Sie:

(a) Die Kurven f_c und g_c sind rektifizierbar und es gilt $L(f) = L(f_c) + L(g_c)$.

(b) Es ist $\lim\limits_{c \uparrow b} L(f_c) = L(f)$.