UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 6 Abgabetermin: 22.05.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 23 **(4 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei

$$g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \int_0^{\frac{x}{y}} f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass g stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von g.

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig und zweimal partiell differenzierbar ist. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und folgern Sie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Aufgabe 25 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader (also das n-fache kartesische Produkt von offenen Intervallen) und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ und $y > 0$ die Gleichung

$$\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$$

erfüllt ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 26 **(4 Punkte)**

Man untersuche, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x\sqrt{x^2 + 2y^2}$$

partiell differenzierbar ist, und berechne dort ihre Ableitung.

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert man $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ und $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Eine Polynomfunktion *in n Variablen ist eine Funktion der Form*

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha,$$

wobei $a_\alpha \in \mathbb{R}$ für höchstens endlich viele $\alpha \in \mathbb{N}^n$ von Null verschieden ist. Der Grad *eines solchen Polynoms ist definiert durch*

$$\deg p = \max\{|\alpha| \,;\, a_\alpha \neq 0\}.$$

Aufgabe 27* **(2*+1*+1*=4* Punkte)**

Seien p und q Polynomfunktionen in n Variablen gegeben durch $p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha$ und $q(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha x^\alpha$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann gibt es eine nichtleere, offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $p(x) = 0$ für alle $x \in U$, wenn $a_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt.
(*Hinweis: Sei m der Grad des Polynoms p. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von p der Ordnung m.*)

(b) Es ist $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $a_\alpha = b_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt.

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$. Dann ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C(K)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf K unendlich-dimensional.
(*Hinweis: Man nennt eine beliebige Familie $(v_i)_{i \in I}$ in einem k-Vektorraum V linear unabhängig genau dann, wenn gilt: Sind $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in k$ und $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $\sum_{j=1}^k \lambda_j v_{i_j} = 0$, so gilt $\lambda_j = 0$ für $j = 1, \ldots, k$.*)
