UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2019

Blatt 7 Abgabetermin: 29.05.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, so dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R} (i = 1, .., n)$ beschränkt sind. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
(*Hinweis: Schreiben Sie* $f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n))$.)

Aufgabe 29 (3+3=6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf partielle und totale Differenzierbarkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto |x - y|x$,

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{|xy|}$.

Aufgabe 30 (2+2+2=6 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und auf partielle Differenzierbarkeit. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung in allen Punkten, in denen sie existieren.

(b) Untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = (0, 0)$ die Funktion $f \circ \gamma$ im Punkt 0 differenzierbar ist. Berechnen Sie $(f \circ \gamma)'(0)$. (*Hinweis: Beachten Sie, dass* $f(\alpha(x, y)) = \alpha f(x, y)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *gilt.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 31* **($2^*+2^* = 4^*$ Punkte)**

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und sei $v \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass div rot$v = 0$ ist.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g \in C^2(U)$. Zeigen Sie, dass

$$\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2 < \nabla f, \nabla g > + f(\triangle g)$$

gilt.
