UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

Sommersemester 2019

Blatt 9 Abgabetermin: 12.06.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 36 (2+2+2=6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$,

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$,

(iii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$.

---

*Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $1 \le k \le \infty$. Man sagt, dass D einen C^k-*Rand *besitzt, falls zu jedem Punkt $p \in \partial D$ eine offene Umgebung U und eine Funktion $r \in C^k(U)$ existieren mit*

$$U \cap D = \{x \in U \mid r(x) < 0\} \text{ und } \operatorname{grad} r(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U.$$

Aufgabe 37 (3+1=4 Punkte)

(a) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit C^k-Rand, $1 \le k \le \infty$ und U, r wie oben. Zeigen Sie:

$$U \cap \partial D = \{x \in U \mid r(x) = 0\} \text{ und } U \cap (\overline{D})^c = \{x \in U \mid r(x) > 0\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass jede offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ einen C^∞-Rand besitzt.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (1 - x)(1 - y)(1 - xy)$ und sei $M := [-1, 1]^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f|_M$ ihr Minimum und Maximum annimmt und bestimmen Sie $\min\{f(x) \mid x \in M\}$ und $\max\{f(x) \mid x \in M\}$ sowie alle Punkte in M, in denen diese Werte angenommen werden.

(bitte wenden)

Aufgabe 39 **(2+2 = 4 Punkte)**

Seien $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2$$

Zeigen Sie:

(a) f hat ein lokales Minimum im Schwerpunkt $s = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$.

(b) $f(s) = \min f(\mathbb{R}^k) < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{s\}$.
(*Hinweis: Betrachten Sie* $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x)$.)

Aufgabe 40* **(2*+2*=4* Punkte)**

(a) Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass A genau dann bijektiv ist, wenn $\inf\{\|Ax\| \; ; \; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| = 1\} > 0$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen aus der linearen Algebra benutzen, dass für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- *(a) A ist bijektiv,*
- *(b) A ist injektiv,*
- *(c) Gilt $Ax = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$, so ist $x = 0$.*

(b) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die in x_0 differenzierbar ist. Zeigen Sie: Ist $Df(x_0)$ bijektiv, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von x_0 so, dass $f(x) \neq f(x_0)$ für alle $x \in V$ mit $x \neq x_0$ gilt.