**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

**Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie**
Sommersemester 2020

**Blatt 10** Abgabetermin: /

---

**Dieses Übungsblatt soll der Vorbereitung auf die Klausur dienen. Eine Abgabe/Korrektur wird nicht stattfinden.**

## Aufgabe 37

(a) Sei

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2 - xy - 1.$$

Bestimmen Sie eine harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $u + iv$ holomorph ist (wobei wir $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ kanonisch vermöge der Abbildung $(x, y) \mapsto x + iy$ identifizieren).

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$

offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

---

## Aufgabe 38

Geben Sie Funktionen $f_1, f_2, f_3$ an, die holomorph in einer Umgebung von 0 sind und folgende Bedingungen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ erfüllen, oder zeigen Sie, dass solche Funktionen nicht existieren:

(a) $f_1^{(n)}(0) = (n-1)!$,

(b) $f_2(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}$,

(c) $|f_3^{(n)}(0)| \geq n! n^n$.

---

## Aufgabe 39

(a) Existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{f(z)} = \sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$?

(b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $g$ mit $|g(z)| \leq |z - 2|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

**(bitte wenden)**

## Aufgabe 40

(a) Entwickeln Sie die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{(2-z)(1+z^2)}$$
auf dem Kreisring $K_{1,2}(i) = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z-i| < 2\}$ in ihre Laurentreihe.

(b) Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, geben Sie im Falle von Polstellen die Ordnung des Poles an, und berechnen Sie die Residuen in den Singularitäten:
$$\frac{1}{1+e^{z+\pi i}};\quad \frac{\sin z}{z^2};\quad \frac{\cos z}{z^2}.$$

(c) Sei $f \in \mathcal{O}(D_R(z_0))$ nicht konstant. Zeigen Sie: Hat $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{f(z_0)\})$ einen Pol in $f(z_0)$, so hat $g \circ f$ einen Pol in $z_0$, und die Polstellenordnung von $g$ in $f(z_0)$ ist ein Teiler der Polstellenordnung von $g \circ f$ in $z_0$.

## Aufgabe 41

Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $n$ und $M \geq 0$ eine reelle Zahl mit $|p(z)| \leq M$ für alle $|z| \leq 1$. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ gilt $|p(z)| \leq M|z|^n$. *(Hinweis: Betrachten Sie $\frac{p(z)}{z^n}$.)*

## Aufgabe 42

Berechnen Sie die Integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2}\,dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$.

## Aufgabe 43

(a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen der Funktion $z^4 + 12z^2 + 15z + 1$ in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$.

(b) Seien $r > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| > \frac{e^r}{r}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^z = cz$ für $z \in D_r(0)$ genau eine Lösung hat.

## Aufgabe 44

Sei $f : \mathbb{D} \to \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorph mit $f(0) = 1$. Zeigen Sie, dass
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$
für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt und dass $|f'(0)| \leq 2$. *(Hinweis : Schalten Sie eine geeignete konforme Abbildung hinter $f$ und benutzen Sie das Schwarzsche Lemma.)*

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre**