UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2020

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 20.05.2020, 22.00 Uhr

Aufgabe 5 (4×1=4 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils, in welchen Punkten die durch die folgenden Vorschriften gegebenen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

(a) $f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3 \quad (x, y \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x+iy) = x^2\cos(y) + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$,

(c) $f(z) = \sin|z|$,

(d) $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2)$.

Aufgabe 6 (3×2=6 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$? Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, für die $u + iv$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist:

(a) $u(x, y) = x^3 - y^3$,

(b) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,

(c) $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Seien $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}^*$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

(Es gilt also $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, falls dieser Limes existiert.)

(bitte wenden)

Aufgabe 8 **(1+1+1+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5} z^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + a^n) z^n$ $(a \in \mathbb{C})$.

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Diese Gruppen müssen aus Teilnehmern einer Übungsgruppe bestehen und dürfen sich nicht ständig ändern. Bitte treten Sie nicht persönlich in Kontakt. Zur Zulassung für die Hauptklausur müssen insgesamt mindestens 50 Prozent der gesamten Übungspunkte erreicht werden. Bitte senden Sie ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei per E-Mail an ihren Tutor. ***Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 5 plus eine zufällig ausgewählte Aufgabe (dieselbe für alle Studenten).***

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre