



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie  
Sommersemester 2020

Blatt 3

Abgabedatum: 28.05.2020

---

**Aufgabe 9**

**(3x2=6 Punkte)**

Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen  $f$  um die angegebenen Entwicklungspunkte  $b$  und berechnen Sie die Konvergenzradien der auftretenden Potenzreihen:

(a)  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$  mit  $b \in \mathbb{C}^*$  beliebig.

(b)  $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{2z+4}{z+1}$  mit  $b = 1$ .

(c)  $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$  mit  $b = \frac{1}{2}$ .

(Hinweis : geometrische Reihe.)

---

**Aufgabe 10**

**(4 Punkte)**

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  habe den Konvergenzradius  $R$ . Bestimmen Sie den Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ .

---

**Aufgabe 11**

**(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}, L(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie ferner, dass  $|\exp(z) - 1| < 1$  für alle  $z \in D_{\log 2}(0)$  gilt, und dass  $L(\exp(z) - 1) = z$  für alle  $z \in D_{\log 2}(0)$  ist.

(Hinweis : Berechnen Sie  $\frac{d}{dz}(L(\exp(z) - 1) - z)$ .)

---

**(Bitte wenden)**

## Aufgabe 12

(3x2=6 Punkte)

Seien  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^*$  und  $k \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\log_{\vartheta,k} : \mathbb{C}_\vartheta \rightarrow \mathbb{C}$  hat keine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{C}_\vartheta \cup \{re^{i\vartheta}\}$ ,
  - (b) Ist  $f : \mathbb{C}_\vartheta \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $e^{f(z)} = z$  für alle  $z \in \mathbb{C}_\vartheta$ , so gibt es ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $f = \log_{\vartheta,n}$ ,
  - (c) Ist  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(z_1 z_2) = f(z_1) + f(z_2)$  für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ , so ist  $f \equiv 0$ .  
(Hinweis : Berechnen Sie für festes  $w \in \mathbb{C}^*$  die Ableitung der Funktion  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $g(z) = f(zw) - f(z) - f(w)$ .)
- 

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Aufgaben werden korrigiert: Dieses mal Aufgabe 9 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/ft/>