



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Blatt 4

Abgabedatum: 04.06.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 13

(2+2=4 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der Integrale

(a)

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

wobei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 2z \cos(iz) - iz^2 \sin(iz)$ und γ ein Integrationsweg mit $A(\gamma) = 0$ und $E(\gamma) = i\pi$ ist und

(b)

$$\int_{\gamma} g(z) dz,$$

wobei $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto ze^{iz^2}$ und γ ein Integrationsweg mit $A(\gamma) = 1 + i$ und $E(\gamma) = 2i$ ist.

Aufgabe 14

(4 Punkte)

Seien $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom und $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jedes $r \in]0, \infty[$ gilt:

$$\int_{\partial D_r(c)} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(c)}.$$

(Hinweis : Reduzieren Sie auf den Spezialfall $c = 0$.)

Aufgabe 15

(3+1+1=5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

(a) Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung F' . Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re}(F')$ nullstellenfrei, so ist F injektiv.

(Hinweis : Schreiben Sie $F(z) - F(w)$ als Kurvenintegral.)

(b) Es sei $H = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Zeigen Sie, dass $F : H \rightarrow \mathbb{C}, F(z) = z + e^z$ injektiv ist.

(c) Genügt es in der Situation von Teil (a) zu verlangen, dass F' nullstellenfrei ist?

(Bitte wenden)

Aufgabe 16**(2+1+2=5 Punkte)**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f : D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die dargestellte Funktion. Sei $r \in]0, R[$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_k| \leq \frac{\|f\|_{\partial D_r(a)}}{r^k}.$$

(c) Ist $R = \infty$ und f beschränkt, so ist f konstant.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 13 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/ft/>