



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Blatt 5

Abgabedatum: 11.06.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 17

(1+1+1+2=5 Punkte)

Berechnen Sie mit der Cauchyschen Integralformel die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^5} dz$$

(b)

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{\sin z}{z^2 + \pi^2} dz$$

(c)

$$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \quad (n \geq 1)$$

(d)

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{z^3(1-z)} dz$$

Aufgabe 18

(1+3=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} besitzt.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{\sin z}{\cos z} dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial D_1(0)} \frac{\cos z}{\sin z} dz.$$

Aufgabe 19

(2+2=4 Punkte)

Berechnen Sie für $a \in \mathbb{C}^*$ mit $|a| \neq 1$

(a)

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz,$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos t + a^2} dt.$$

(Bitte wenden)

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $k \in \mathbb{N}^*$. Eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt k -te holomorphe Wurzel von f , falls $g(z)^k = f(z)$ für alle $z \in U$ gilt.

Aufgabe 20

(2+2+2=6 Punkte)

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $0 \notin f(G)$ und sei $k \geq 2$. Zeigen Sie:

- (a) f besitzt einen holomorphen Logarithmus genau dann, wenn $\frac{f'}{f}$ eine holomorphe Stammfunktion hat. (Hinweis : Benutzen Sie für " \Leftarrow " die Quotientenregel.)
- (b) Sind g_1, g_2 k -te holomorphe Wurzeln von f , so gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $c^k = 1$ und $g_1 = cg_2$.
- (c) Wenn f einen holomorphen Logarithmus besitzt, dann existiert eine k -te holomorphe Wurzel von f . Gilt die Umkehrung?

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 17 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/ft/>