



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Blatt 6

Abgabedatum: 18.06.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 21

(2+2=4 Punkte)

- (a) Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, in denen der Cauchysche Integralsatz gilt, das heißt für $j = 1, 2$ sei $\int_{\gamma} f dz = 0$ für jede holomorphe Funktion $f : G_j \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G_j .

Zeigen Sie: Ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend und nicht leer, so gilt der Cauchysche Integralsatz in $G_1 \cup G_2$. (Hinweis : Benutzen Sie Satz 6.5)

- (b) Zeigen Sie, dass der Cauchysche Integralsatz gilt in $\mathbb{C}_{-\pi}$ und in $G = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup]a, b[$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
-

Aufgabe 22

(1+1+2=4 Punkte)

- (a) Gibt es eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$?

- (b) Gibt es eine nichtkonstante holomorphe Funktion $g : D_1(1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

- (c) Man gebe eine holomorphe Funktion $h : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ an, welche jeweils die folgende Bedingung erfüllt oder man zeige, dass eine solche Funktion nicht existiert:

(i) $h(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ und $h(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $h^{(n)}(0) = (n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 23

(4 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(z) = g(\frac{1}{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass f und g konstant sind.

(Bitte wenden)

Aufgabe 24

(2+2=4 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet in \mathbb{C} und sei $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die $f|_G$ holomorph ist. Zeigen Sie:

- (a) Ist $|f|$ konstant auf ∂G , so hat f eine Nullstelle in G oder ist konstant.
 - (b) Ist $f(\partial G) \subseteq \mathbb{R}$, so ist f konstant. (*Hinweis : Benutzen Sie in Teil (b) die Exponentialfunktion.*)
-

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 22 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/ft/>