UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2020

Blatt 8 Abgabetermin: Donnerstag, 02.07.2020, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 29 (4x1=4 Punkte)

Klassifizieren Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie im Falle eines Poles dessen Ordnung:

$$\exp(\sin\frac{1}{z}),\ \frac{1}{z(e^z-1)},\ \frac{z}{\sin z},\ \frac{1}{z^2(z+1)}+\cos\frac{1}{z}.$$

.

Aufgabe 30 (3x2=6 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\dot{D}_R(a))$. Zeigen Sie:

(a) Ist a Pol für f, so gibt es für jede offene Umgebung $U \subseteq D_R(a)$ von a ein $s > 0$ mit $\mathbb{C}\backslash\overline{D_s}(0) \subseteq f(U\backslash\{a\})$. (*Hinweis : Betrachten Sie* $\frac{1}{f}$.)

(b) Ist $\operatorname{Im} f$ nach oben oder unten beschränkt, so ist a hebbare Singularität für f.

(c) a ist kein Pol für e^f.

Aufgabe 31 (2+2=4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f. Zeigen Sie:

(a) Ist f' hebbar in a, so ist auch f hebbar in a.

(b) Ist a ein Pol der Ordnung m für f', so ist $m \geq 2$ und f hat einen Pol der Ordnung $m-1$ in a. (*Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass* $res(f', a) = 0$ *ist.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 32 (2+3=5 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

(a) $f(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)}$ für $1 < |z| < 2$,

(b) $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+7)}$ in $\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < \sqrt{7}\}$ und $\{z \in \mathbb{C}; |z| > \sqrt{7}\}$.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 29 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre