



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Blatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, 09.07.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 33

(2+2=4 Punkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

- (a) Hat f in a einen einfachen Pol und ist $g \in \mathcal{O}(U)$, so gilt

$$\operatorname{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z),$$

$$\operatorname{res}(fg, a) = g(a)\operatorname{res}(f, a).$$

- (b) Ist $f = \frac{g}{h}$ auf $U \setminus \{a\}$ mit $g, h \in \mathcal{O}(U)$ und hat h eine einfache Nullstelle in a , so ist

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Aufgabe 34

(4+2=6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

(i)

$$\frac{1 - \cos z}{z^3}$$

(ii)

$$\frac{1}{\sin \pi z}$$

(iii)

$$\frac{1}{e^z + 1}$$

(iv)

$$ze^{\frac{1}{1-z}}$$

- (b) Man berechne das Residuum

$$\operatorname{res}\left(\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}, 0\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie das Residuum

$$\operatorname{res}\left(\frac{z}{1 - (2 - z)^{(\frac{1}{2}, -\pi, 0)}}, 1\right).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 35**(2+2=4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen (in Vielfachheiten) der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

(a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^{10} - 4z^6 + 2$ in $1 < |z| < 2$,

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z^7 - 3z^3 - i$ in $|z| > 1$.

Aufgabe 36**(3+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)},$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Bitte senden Sie Ihre Lösungen in Form einer pdf-Datei an Ihren Tutor. Zwei der Übungsaufgaben werden korrigiert: Dieses Mal Aufgabe 35 und eine zufällig ausgewählte Aufgabe.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre>