Topologie II

Jörg Eschmeier

Saarland University

Sommersemester 2020

Bisherige Ergebnisse und Fragen

- In welchen topologischen Räumen existieren stetige Zerlegungen der Eins?
- Wie erkennt man, ob eine Topologie metrisierbar ist?

Sei (X, t) ein topologischer Raum.

Theorem (Urysohns Lemma)

Ist (X, t) normal, so existieren endliche stetige Zerlegungen der Eins in (X, t).

Theorem (Urysohnscher Einbettungssatz)

Äquivalent sind:

- (X, t) *ist separabel und metrisierbar*
- (X, t) *ist regulär und t besitzt eine abzählbare Basis*

Parakompakte Räume

Theorem (Satz von Stone, 1948)

Metrische Räume sind parakompakt.

Was sind parakompakte Räume?

Definition

(X, t) heißt parakompakt, falls X Hausdorff ist und $\forall$ offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von X $\exists$ Verfeinerung zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_i)_{i\in I}$.

Zur Erinnerung: Für Familien $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(V_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{P}(X)$ heißt

- $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokal endlich $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U_\alpha \cap U = \emptyset$ für fast alle α
- $(V_i)_{i\in I}$ Verfeinerung von $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ $:\Leftrightarrow \forall i \in I \exists \alpha \in A:$ mit $V_i \subset U_\alpha$

Klar: Kompakte Hausdorffräume sind parakompakt.

Beweis des Satzes von Stone

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wichtigster Schritt im Beweis ist:

Lemma

Jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X hat eine Verfeinerung zu einer σ-lokal endlichen offenen Überdeckung $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$.

Dabei heißt $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-lokal endlich, falls

$$\exists \text{ Folge } (\mathfrak{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ lokal endlicher } \mathfrak{B}_n \subset \mathcal{P}(X) \text{ mit } \mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_n.$$

Im Beweis benötigt man den Wohlordnungssatz (äquivalent zum Auswahlaxiom):

Theorem

Auf jeder Menge $M \neq \emptyset$ existiert eine Wohlordnung, d. h. eine partielle Ordnung, bezüglich der jede nicht-leere Teilmenge von M ein Minimum besitzt.

Nur im Beweis des Lemmas wird explizit die Metrik benutzt.

Eigenschaften parakompakter Räume

Lemma

(X, t) metrisierbar $\Rightarrow$ (X, t) parakompakt $\Rightarrow$ (X, t) normal

Lemma

In parakompakten Räumen gibt es stetige Zerlegungen der Eins:
Ist $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X, so existieren stetige $\theta_\alpha : X \to [0, 1]$ mit

1. $\mathrm{supp}(\theta_\alpha) \subset U_\alpha$ *für alle* $\alpha \in A$,
2. *die Familie* $(\mathrm{supp}\,(\theta_\alpha))_{\alpha \in A}$ *ist lokal endlich,*
3. $\sum_{\alpha \in A} \theta_\alpha(x) = 1$ *für alle* $x \in X$.

Gibt es $\forall$ offenen Überdeckungen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X eine solche Familie $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$, so ist X parakompakt, denn $X = \bigcup\{\theta_\alpha \neq 0\}$ ist eine lokal endliche offene überdeckung mit $\{\theta_\alpha \neq 0\} \subset U_\alpha$ für alle α.

Also: $\exists$ stetige Zerlegungen der Eins + Hausdorff $\Leftrightarrow$ parakompakt

Vektorwertige stetige Zerlegungen der Eins

Indem man explizit die Metrik und die Existenz beliebiger stetiger Zerlegungen der Eins (also den Satz von Stone) benutzt kann man zeigen:

Theorem (Satz von Dugundji)

Sei X ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to E$ stetig, so hat f eine stetige Fortsetzung $F : X \to E$ mit $F(X) \subset Conv(f(A))$.

Lemma (Vererbungseigenschaften)

(a) *Abgeschlossene Teilräume von parakompakten Räumen sind parakompakt.*

(b) *Beliebige Teilräume und Produkte (sogar endliche Produkte) parakompakter Räume brauchen nicht parakompakt zu sein.*

Satz von Nagata-Smirnov

Theorem

Für einen lokalkompakten Hausdorffraum X mit Topologie t sind äquivalent:

1. (i) *t hat eine abzählbare Basis.*
2. (ii) *X ist separabel und metrisierbar.*
3. (iii) *$\hat{X}$ ist metrisierbar*
4. (iv) *X ist abzählbar im Unendlichen ($X = \bigcup K_n$) und metrisierbar.*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus dem Urysohnschen Einbettungssatz

X ist separabel und metrisierbar $\Leftrightarrow$ X ist regulär mit abzählbarer Basis.

Allgemeiner gilt für beliebige topologische Räume X:

Theorem (Nagagta-Smirnov, 1951)

X ist metrisierbar $\Leftrightarrow$ X ist regulär und hat eine σ-lokal endliche Basis.

F_σ-und G_δ-Mengen

Definition

- Abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen heißen F_σ-Mengen.
- Abzählbare Durchschnitte offener Mengen heißen G_δ-Mengen.

Lemma (10.3)

Ist X regulär mit σ-lokal endlicher Basis $\mathfrak{B}$, so gilt

- *Jede offene Menge $U \subset X$ ist F_σ.*
- *Jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ ist G_δ.*

Lemma (10.4)

Ist X normal, so gilt für $F, U \subset X$

- *F ist abgeschlossen und G_δ $\Leftrightarrow$ $\exists f : X \to [0,1]$ stetig mit $F = \overset{-1}{f}(\{0\})$*
- *U ist offen und F_σ $\Leftrightarrow$ $\exists f : X \to [0,1]$ stetig mit $U = \overset{-1}{f}(]0,\infty[)$*

Beweis von Lemma 10.3

Sei X regulär mit σ-lokal endlicher Basis $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ ($\mathcal{B}_n$ lokal endlich)

Sei $U \subset X$ offen

$\Rightarrow$ (X regulär) $\forall x \in U \exists n_x \in \mathbb{N}$ und $B_{n_x,x} \in \mathcal{B}_{n_x}$ mit

$$x \in B_{n_x,x} \subset \overline{B}_{n_x,x} \subset U$$

$\Rightarrow$ ($\mathcal{B}_n$ lokal endlich) Nach Lemma 9.2 ist $\forall n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \bigcup \left(\overline{B}_{n_x,x};\ x \in U \text{ und } n_x = n\right) \text{ abgeschlossen}$$

und

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Beweis von Lemma 10.4

Sei X normal und $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ abgeschlossen mit offenen U_n

$$\Rightarrow \text{ (Urysohn) } \forall n \in \mathbb{N}\ \exists f_n : X \to [0,1] \text{ stetig mit}$$

$$f_n|_F \equiv 0, \quad f_n|_{X\setminus U_n} \equiv 1$$

$$\Rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n} : X \to [0,1] \text{ stetig mit } F = \overset{-1}{f}(\{0\})$$

Ist $F = \overset{-1}{f}(\{0\})$ für eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ so ist F abgeschlossen und wegen

$$F = \bigcap \overset{-1}{f}(]-\infty, \frac{1}{n}[)$$

auch G_δ.

Nagata-Smirnov: Beweis

Lemma

X metrisierbar $\Rightarrow$ X ist regulär mit σ-lokal endlicher Basis.

Proof.

Sei X metrisierbar $\Rightarrow$ X ist regulär und nach dem Satz von Stone hat $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{U}_n = \{B_{1/n}(x);\ x \in X\}$$

eine Verfeinerung zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{B}_n$. Setze

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n \qquad \text{(Genügt z.z.: } \mathcal{B} \text{ ist Basis)}$$

Ist $x \in U \in t$, so $\exists n \in \mathbb{N}^*$ und $B \in \mathcal{B}_{2n}, y \in X$ mit

$$B_{1/n}(x) \subset U \text{ und } x \in B \subset B_{\frac{1}{2n}}(y)$$

Dann ist $x \in B \subset B_{\frac{1}{2n}}(y) \subset B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$. $\square$

Nagata-Smirnov: Beweis

Lemma

X regulär mit σ-lokal endlicher Basis $\Rightarrow$ X ist metrisierbar

Proof.

Sei $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ mit lokal endlichen $\mathcal{B}_n$ eine Basis von t.

(1) *X ist parakompakt:* Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ offene Überdeckung von X

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{V}_n = \{B \in \mathcal{B}_n;\ \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } B \subset U\}$ lokal endlich

$\Rightarrow \mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ verfeinert $\mathcal{U}$ zu einer σ-lokal endlichen offenen Überdeckung.

(2) *X ist metrisierbar:* X regulär mit σ-lokal endlicher Basis

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{B}_n \exists f_{n,B} : X \to [0,1]$ stetig mit

$$B = \{f_{n,B} > 0\}.$$

Definiere $g_{n,B} = \frac{f_{n,B}}{1+\sum_{C\in\mathcal{B}_n} f_{n,C}} : X \to [0,1]$ stetig $\Rightarrow d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{B}_n} \frac{1}{2^n} |g_{n,B}(x) - g_{n,B}(y)|}_{\le \frac{1}{2^n} 2 \text{ stetig in } (x,y)\in X\times X}$$

ist stetig. Also ist t höchstens feiner als t_d.

Nagata-Smirnov Beweis

Definiert

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{B\in\mathcal{B}_n} \frac{1}{2^n} |g_{n,B}(x) - g_{n,B}(y)|$$

überhaupt eine Metrik? Symmetrie ist klar.
Da $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ Basis und X Hausdorff ist, $\exists$ für $x \neq y$ ein $B \in \mathcal{B}_n$ mit $x \in B$, $y \notin B$

$$\Rightarrow d(x,y) \geq \frac{1}{2^n} g_{n,B}(x) > 0.$$

Bleibt zu zeigen: t_d ist feiner als t

Sei $U \in \mathfrak{U}_t(x)$ eine t-Umgebung von $x \in X \quad \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_{n_0}$ mit $x \in B \subset U$.
Dann folgt aus

$$d(y,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{B\in\mathcal{B}_n} \frac{1}{2^n} |g_{n,B}(y) - g_{n,B}(x)| < \frac{1}{2^{n_0}} g_{n_0,B}(x) := r,$$

dass $g_{n_0,B}(y) > 0$ ist. Also ist $B_r(x) \subset B \subset U$.

Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz

Seien X, Y topologische Räume. Wir identifizieren

$$Y^X \cong \prod_{x \in X} Y_x \text{ mit } Y_x = Y \text{ für alle } x \in X,$$

Eine Subbasis der Produkttopologie τ_π auf Y^X bilden die Mengen

$$S(x, U) = \{f \in Y^X;\ f(x) \in U\} \qquad (x \in X,\ U \subset Y \text{ offen}).$$

Man nennt τ_π die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Y^X.

Sei jetzt X ein topologischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum.

Lemma (13.2)

- *Die Mengen*

$$B_{C,\epsilon}(f) = \{g \in Y^X; \sup_{x \in C} d(g(x), f(x)) < \epsilon\}\ (f \in Y^X,\ C \subset X \text{ kompakt}, \epsilon > 0)$$

bilden die Basis einer Topologie τ_c auf Y^X.

- *Ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in Y^X konvergiert bezüglich τ_c gegen ein $f \in Y^X$*

$$\Leftrightarrow (f_i|_K) \xrightarrow{i} f|_K \text{ gleichmäßig } \forall K \subset X \text{ kompakt.}$$

Lemma 13.2 - Beweis

Es ist $B_{C,\epsilon}(f) = B_\epsilon^{d_C}(f)$ bezüglich

$$d_C(g,f) = \sup_{x \in C} d(g(x), f(x)) \in [0,\infty]$$ erfüllt die Δ-Ungleichung

Sei $g_0 \in B_{C_1,\epsilon_1}(f_1) \cap B_{C_2,\epsilon_2}(f_2)$. Setze

$$\delta = \min_{i=1,2} \Big(\epsilon_i - d_{C_i}(g_0, f_i)\Big)$$

$\Rightarrow \forall g \in B_{C_1 \cup C_2,\delta}(g_0)$ gilt

$$d_{C_i}(g, f_i) \leq \underbrace{d_{C_i}(g, g_0)}_{<\delta} + d_{C_i}(g_0, f_i) < \epsilon_i$$

$\Rightarrow B_{C_1 \cup C_2,\delta}(g_0) \subset B_{C_1,\epsilon_1}(f_1) \cap B_{C_2,\epsilon_2}(f_2)$

Nach Augabe 23 bilden die Mengen $B_{C,\epsilon}(f)$ die Basis einer Topologie auf Y^X.

Kompakt erzeugte Räume

Definition

- τ_π heißt Topologie der punktweisen Konvergenz auf Y^X
- τ_c die Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz auf Y^X

Im Allgemeinen ist $C(X, Y) \subset Y^X$ weder τ_π noch τ_c-abgeschlossen.

Definition

(X, t) heißt kompakt erzeugt, falls eine Menge $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn $U \cap K$ offen ist in K $\forall K \subset X$ kompakt.

Die wichtigsten Beispiele kompakt erzeugter Räume sind lokalkompakte Räume und Räume mit dem 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Theorem (13.7)

(X, t) kompakt erzeugt und (Y, d) metrischer Raum

$$\Rightarrow C(X, Y) \subset Y^X \text{ ist } \tau_c\text{-abgeschlossen.}$$

Die kompakt-offene Topologie

Definition

Die *co*-Topologie τ_{co} auf $C(X, Y)$ (X, Y top. Räume) ist die Topologie mit der Subbasis

$$S(K, U) = \{f \in C(X, Y);\ f(K) \subset U\} \qquad (K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ offen}).$$

Ist X ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum, so ist τ_{co} die Relativtopologie von τ_c auf $C(X, Y)$ (Satz 13.9)

Lemma (13.11)

X Hausdorff und $\mathcal{S}$ Subbasis für Y $\Rightarrow$ Subbasis von $(C(X, Y), \tau_{co})$ ist

$$\{S(K, U);\ K \subset X \text{ kompakt und } U \in \mathcal{S}\}.$$

Theorem (13.10)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und Y ein topologischer Raum. Versieht man $C(X, Y)$ mit der co-Topologie, so ist die Abbildung

$$\epsilon : X \times C(X, Y) \to Y,\ (x, f) \to f(x)$$

stetig.

Satz 13.9 ($\tau_{co} = \tau_c|_{C(X,Y)}$) - Beweis

$\supset$: Sei X ein topologischer, Y ein metrischer Raum. Sei $U \in \mathcal{U}(f)$ bezgl. $\tau_c|_{C(X,Y)}$

$\Rightarrow\ \exists K \subset X$ kompakt , $\delta > 0, g \in Y^X$ mit $f \in B_{K,\delta}(g) \cap C(X,Y) \subset U$

$\Rightarrow$ Für $\epsilon = \delta - d_K(f,g)$ ist $B_{K,\epsilon}(f) \subset B_{K,\delta}(g)$.

Setze für $x \in K$

$$K_x = \overset{-1}{f}\,(\overline{B}_{\epsilon/3}(f(x)) \cap K \subset X \ \text{ kompakt}$$

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_r \in K$ mit

$$K = K_{x_1} \cup \dots \cup K_{x_r}$$

Für $g \in C(X,Y)$ mit $g(K_{x_i}) \subset B_{\epsilon/2}(f(x_i)) =: U_i$ für $i = 1, \dots, r$ gilt

$$x \in K_{x_i} \Rightarrow d(g(x), f(x)) \leq \underbrace{d(g(x), f(x_i))}_{<\epsilon/2} + \underbrace{d(f(x_i), f(x))}_{\leq \epsilon/3} < \frac{5}{6}\epsilon$$

Also ist $f \in \bigcap_{i=1}^r S(K_{x_i}, U_i) \subset B_{K,\epsilon}(f) \cap C(X,Y) \subset U$.

Lemma 13.11 - Beweis

Sei X Hausdorff, Y ein topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{S}$ und zugehöriger Basis $\mathcal{B}$.

Genügt z.z.: $\{S(K, U);\ K \subset X$ kompakt und $U \in \mathcal{B}\}$ ist Subbasis von τ_{co}.

Seien $U \subset C(X, Y)\tau_{co}$-offen und $f \in U$

$\Rightarrow \exists K_1, \ldots, K_r \subset X$ kompakt, $V_1, \ldots, V_r \subset Y$ offen mit

$$f \in \bigcap_{i=1}^{r} S(K_i, V_i) \subset U$$

Sei $(K, V) = (K_i, V_i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ und sei $f \in S(K, V)$

$\Rightarrow \forall x \in K \exists V_x \in \mathcal{B}\ \exists K_x \in \mathcal{U}^K(x)$ kompakt mit

$$f(K_x) \subset V_x \subset V$$

$\Rightarrow K = K_{x_1} \cup \ldots K_{x_n}$ und

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(K_{x_i}, V_{x_i}) \subset S(K, V)$$

Seien X, Y, Z top. R'e und alle Funktionenräume mit der Topologie τ_{co} versehen.

Lemma (13.12)

Seien X, Y, Z topologische Räume und $f : X \times Z \to Y$ stetig

$$\Rightarrow \quad \bar{f} : Z \to C(X, Y), z \mapsto f(\cdot, z) \ \textit{ ist stetig}$$

Idee: Sei $\bar{f}(z_0) \in S(K, U)$ ($K \subset X$ kompakt, $U \subset Y$ offen). Da

$$\overset{-1}{f}(U) \supset K \times \{z_0\} \ \text{ offen ist,}$$

gibt es $V \in \mathcal{U}(z_0)$ mit $K \times V \subset \overset{-1}{f}(U)$ oder äquivalent mit $\bar{f}(V) \subset S(K, U)$.

Theorem (13.13)

$\alpha : C(X \times Z, Y) \to C(Z, C(X, Y)),\ f \mapsto \bar{f} \quad (\bar{f}(z) = f(\cdot, z))$ *ist injektiv mit:*

- *Z Hausdorff* $\Rightarrow$ *α ist stetig*
- *X lokalkompakter Hausdorffraum* $\Rightarrow$ *α ist surjektiv*
- *X und Z Hausdorff* $\Rightarrow$ *α ist eine topologische Einbettung*
- *X lokalkompakter Hausdorffraum und Z Hausdorff* $\Rightarrow$ *α Homömorphismus*

Arzela-Ascoli theorem

Seien X, Y topologische Räume und $C(X, Y)$ versehen mit seiner *co*-Topologie.

Welche Mengen in $C(X, Y)$ sind relativ kompakt?

Definition

Seien X ein top. Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.

- $\mathcal{F}$ heißt gleichstetig in $x \in X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x): \ f(U) \subset B_\epsilon(f(x)) \forall f \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ heißt gleichstetig $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist gleichstetig in jedem $x \in X$.
- $M \subset X$ heißt relativ kompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{M} \subset X$ ist kompakt.

Theorem

Seien X ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.

- *Ist $\mathcal{F}$ gleichstetig und sind $\mathcal{F}_x = \{f(x);\ f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ relativ kompact $\forall x \in X$*

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F} \subset C(X, Y) \text{ ist relativ kompakt}$$

- *Ist X lokalkompakt oder mit 1.Abzählbarkeitsaxiom, so gilt die Umkehrung.*

Anwendungen von Arzela-Ascoli

Examples

- Sei X normierter Raum und $X' = \{u; u : X \to \mathbb{C}$ stetig und linear $\}$

  $\Rightarrow \; B_{X'} = \{u \in X'; \|u\| \leq 1\} \subset C(X, \mathbb{C})$ gleichstetig und pktw. relativ kompakt

  $\Rightarrow \; B_{X'} \subset C(X, \mathbb{C})$ τ_{co}- und damit τ_π-kompakt (Satz von Alaoglu-Bourbaki)

- Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $M \subset \mathcal{O}(U) = \{f; f : U \to \mathbb{C}$ holomorph$\}$ beschränkt, d.h.

  $$\sup_{f \in M} \|f\|_K < \infty \forall K \subset U \text{ kompakt.}$$

  Mit der Cauchyschen Integralformel folgt, dass $M \subset C(U, \mathbb{C})$ gleichstetig ist.

  $$\Rightarrow \quad \overline{M}^{\tau_{co}} \subset C(U, \mathbb{C}) \; \tau_{co}\text{-kompakt}$$

  Sei $(K_n)_{n \geq 0}$ eine kompakte Ausschöpfung von $U \Rightarrow \tau_{co} = \tau_c|_{C(U,\mathbb{C})}$ wird erzeugt von

  $$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}.$$

  $\Rightarrow$ Jede Folge in M hat eine kpkt gleichmäßig konvergente Teilfolge (Satz von Montel).

Vollständig reguläre Räume - Definition

Sei (X, t) im Folgenden ein topologischer Raum.

Definition

(X, t) heißt vollständig regulär, falls X Hausdorffsch ist und $\forall F \subset X$ abgeschlossen $\forall x \in X \setminus F$ gibt es ein $f \in C(X, [0, 1])$ mit

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f|_F \equiv 1$$

Normal $\Rightarrow$ vollständig regulär $\Rightarrow$ regulär. Umkehrungen falsch (Munkres)!

Lemma

Teilräume $Y \subset X$ vollständig regulärer Räume sind vollständig regulär.

Beweis. Sei $F \subset Y$ abgeschlossen in Y, $x \in Y \setminus F$. Wegen $F = \overline{F}^X \cap Y$

$$\exists f \in C(X, [0, 1]) : \quad f|_{\overline{F}^X} \equiv 1,\ f(x) = 0 \ \Rightarrow\ f|_Y \text{ tuts}$$

Vollständig reguläre Räume - Eigenschaften

Theorem (15.4)

X ist vollständig regulär $\Leftrightarrow$ X ist Teilraum eines kompakten Hausdorffraums.

Idea: Ist X vollständig regulär, so definiert man die gesuchte Einbettung als

$$j: X \to Y = \prod_{C(X,[0,1])} [0,1], \quad j(x) = (f(x))_{f \in C(X,[0,1])}.$$

Corollary (15.5)

Beliebige topologische Produkte vollständig regulärer Räume sind vollständig regulär.

Lemma (15.6)

Sei X vollständig regulär, j wie in15.4 und $g: X \to \mathbb{R}$ stetig beschränkt

$$\Rightarrow \exists!\, G: \overline{j(X)} \to \mathbb{R} \ \text{ stetig mit } \ G \circ j = g.$$

Idee: *Für $g(X) \subset [0,1]$ lässt sich g schreiben als Komposition*

$$g: X \xrightarrow{j} Y = \prod_{C(X,[0,1])} [0,1] \xrightarrow{\pi_g} \mathbb{R}$$

Kompaktifizierungen

Definition

Sei X ein Hausdorffraum.

1. (i) Eine Kompaktifizierung von X ist ein kompakter Hausdorffraum Z mit $X \subset Z$ dicht.
2. (ii) Z_1, Z_2 wie in (i) heißen äquivalent,falls $\exists h : Z_1 \to Z_2$ Homöomorphismus mit $h|_X = \text{id}$.
3. (iii) Z wie in (i) hat Fortsetungseigenschaft (FE), falls $\forall f : X \to \mathbb{R}$ stetig beschränkt $\exists$ Fortsetzung zu $F \in C(Z, \mathbb{R})$.

- X hat eine Kompaktifizierung $\Leftrightarrow$ X ist vollständig regulär.
- Die Einpunktkompaktifizierung und $[0, 1]$ sind nicht äquivalente Kompaktifizierungen von $(0, 1)$.

Lemma

Sei Z eine Kompaktifizierung von X mit FE und K ein kompakter Hausdorffraum
$\Rightarrow$ $\forall f \in C(X, K)$ *gibt es eine eindeutige Fortsetung* $F \in C(Z, K)$.

Eindeutigkeit von Kompaktifizierungen mit FE

Theorem (15.9)

Je zwei Kompaktifizierungen von X mit FE sind äquivalent.

Corollary (15.10)

Sei X vollständig regulär. Identifiziert man X mit $j(X)$ vermöge der Einbettung

$$j : X \to Y = \prod_{C(X,[0,1])} [0,1], \; j(x) = (f(x))_f,$$

so ist $\overline{j(X)}$ die bis auf Äquivalenz eindeutige Kompaktifizierung von X mit FE.

Definition (15.11)

Für X vollständig regulär nennt man $\beta(X) := \overline{j(X)}$ die Stone-Čech Kompaktifizierung von X.

Stone-Čech Komaktifizierung: Eigenschaften

Corollary (15.12)

Sei X vollständig regulär und K ein kompakter Hausdorffraum.
$\Rightarrow \forall\ f \in C(X, K)\ \exists!$ *eindeutige stetige Fortsetzung* $F \in C(\beta(X), K)$

Theorem (15.13)

Seien X, Y vollständig regulär.

- $\forall\ f \in C(X, Y)\ \exists$ *eindeutige stetige Fortsetzung* $\beta(f) \in C(\beta(X), \beta(Y))$.
- *Z Kompaktifizierung von X* $\Rightarrow\ \exists! q \in C(\beta(X), Z)$ *mit* $q(x) = x\ \forall x \in X$.
  Die Abbildung q ist surjektiv.

Idee: Wähle q als stetige Fortsetzung der Inklusion $i : X \hookrightarrow Z$
$\Rightarrow$ q ist surjektiv als Abbildung mit dichtem abgeschlossenen Bild.

Banachalgebren = Banachraum + Algebra + $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

$C = C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ stetig, beschränkt$\}$ Banachalgebra bzgl. $\|\cdot\|_X$

$$\Rightarrow \Delta_C = \{\chi : C \to \mathbb{C} \text{ Algebrenhomo. mit } \chi(1) = 1\} \overset{FA}{\subset} B_{C'}$$

ist τ_π-abgeschlossen $\Rightarrow$ (Arzela-Ascoli) τ_π-kompakt.

X vollständig regulär $\Rightarrow$ Vermöge der topologischen Einbettung

$$j : X \to (\Delta_C, \tau_\pi),\ x \mapsto \epsilon_X \quad \big(\epsilon_X(f) = f(x)\big)$$

wird (Δ_C, τ_π) zu einer Kompaktifizierung von X mit FE: Für $f \in C = C_b(X)$ definiert

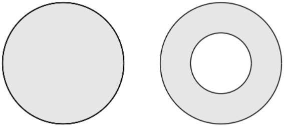
$$\hat{f} : \Delta_C \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\chi) = \chi(f) \ \ (\overset{\chi = \epsilon_X}{=} f(x))$$

eine stetige Fortsetzung von f. Also könnte man definieren

$$\beta(X) = \Delta_{C_b(X)} \quad \big(\text{Strukturraum der Banachalgebra } C_b(X)\big)$$

Warum Homotopietheorie?

Wie kann man eine offene Kreisscheibe und einen offenen Kreisring



topologisch unterscheiden?

Beide sind normal, lokalkompakt, metrisierbar, zusammenhängend, ...

Aber ihre Fundamentalgruppen sind verschieden!

Homotopien

Seien im Folgenden X ein topologischer Raum, $I = [0,1]$ und $x_0, x_1, \ldots \in X$.

Unter einem Weg in X (von x_0 nach x_1) verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : I \to X$ (mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$).

Definition (16.1)

(a) *Eine Schleife in X ist ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ (= Basispunkt der Schleife).*

(b) *Wir schreiben e_{x_0} für den konstanten Weg $e_{x_0} \equiv x_0$.*

(c) *Wege γ_0, γ_1 heißen weghomotop (geschrieben: $\gamma_0 \simeq \gamma_1$), falls $\exists$ Homotopie von γ_0 nach γ_1 , d.h. $H : I \times I \to X$ stetig mit*

$$H(\cdot, 0) = \gamma_0,\; H(\cdot, 1) = \gamma_1,\; H(0, \cdot) \equiv \gamma_0(0),\; H(1, \cdot) \equiv \gamma_0(1).$$

(d) *Eine Schleife γ heißt nullhomotop, falls $\exists a \in X$ mit $\gamma \simeq e_a$.*

Statt weghomotop sagen wir im Folgenden einfach homotop.

Homotopien: Eigenschaften

Lemma (16.2)

Seien $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ Wege in X und seien $\gamma_0 \overset{F}{\simeq} \gamma_1$, $\gamma_1 \overset{G}{\simeq} \gamma_2$ Homotopien.

- $I \times I \to X$, $(s,t) \mapsto F(s, 1-t)$ *ist eine Homotopie von* γ_1 *nach* γ_0.
- γ_0 *und* γ_2 *sind homotop vermöge* $H : I \times I \to X$,

$$H(s,t) = F(s, 2t) \text{ für } (s,t) \in I \times [0, 1/2],$$

$$H(s,t) = G(s, 2t-1) \text{ für } (s,t) \in I \times [1/2, 1].$$

- $\simeq$ *definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von* x_0 *nach* x_1.

Die Homotopieklasse eines Weges $\gamma : I \to X$ von x_0 nach x_1 ist definiert als

$$[\gamma] = \{\delta;\ \delta \text{ Weg in } X \text{ mit } \delta \simeq \gamma\}.$$

Für die Menge der Homotopieklassen aller Wege von x_0 nach x_1 schreiben wir

$$W(x_0, x_1) = \{[\alpha];\ \alpha \text{ Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_1\}.$$

Verknüpfungen von Wegen

Definition (16.3)

Seien α, β Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Wir nennen die Wege $\alpha * \beta, \alpha^- : I \to X$,

$$\alpha * \beta(s) = \alpha(2s) \text{ für } s \in [0, 1/2], \; \alpha * \beta(s) = \beta(2s - 1) \text{ für } s \in [1/2, 1],$$

$$\alpha^- : I \to X, \; \alpha^-(s) = \alpha(1 - s)$$

die Hintereinanderausführung von α und β bzw. die Umkehrung von α.

Theorem (16.4)

Seien $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$.

(a) $\alpha \simeq \alpha'$ *und* $\beta \simeq \beta' \;\Rightarrow\; \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

(b) $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

(c) $\varphi : I \to I$ *stetig mit* $\varphi(0) = 0$ *und* $\varphi(1) = 1 \;\Rightarrow\; \alpha \simeq \alpha \circ \varphi$.

(d) $\alpha * e_{\alpha(1)} \simeq \alpha \simeq e_{\alpha(0)} * \alpha$

(e) $\alpha * \alpha^- \simeq e_{\alpha(0)}$ *und* $\alpha^- * \alpha \simeq e_{\alpha(1)}$.

Fundamentalgruppe

Corollary (16.5)

Für $x_0, x_1, x_2 \in X$ erhalten wir eine wohldefinierte Verknüpfung

$$* : W(x_0, x_1) \times W(x_1, x_2) \to W(x_0, x_2),\ [\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Es gilt:

- $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$,
- $[\alpha] * [e_{\alpha(1)}] = [\alpha],\ [e_{\alpha(0)}] * [\alpha] = [\alpha]$,
- $[\alpha] * [\alpha^-] = [e_{\alpha(0)}],\ [\alpha^-] * [\alpha] = [e_{\alpha(1)}]$.

Insbesondere ist $W(x_0, x_0)$ mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe.

Definition (16.6)

Für $x_0 \in X$ nennt man

$$\pi_1(X, x_0) = (W(x_0), *)$$

die Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt x_0.

Beispiel: $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow \pi_1(X, x_0)$ trivial $\quad (\cong \{0\})$

Fundamentalgruppe: Eigenschaften

In wegzushgden Räumen ist die Fundamentalgruppe unabhängig vom Basispunkt.

Theorem (16.7)

Jeder Weg β von x_0 nach x_1 induziert einen Gruppenisomorphismus

$$t(\beta) : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0),\ [\alpha] \mapsto [\beta] * [\alpha] * [\beta^-].$$

Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ induzieren Homorphismen $\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$.

Theorem (16.9)

$f : X \to Y$ stetig zwischen topologischen Räumen mit $f(x_0) = y_0$

$$\Rightarrow \quad f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),\ [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha] \quad \text{Gruppenhomomorphismus}$$

$$f_*([\alpha] * [\beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta])$$

Homotopieäquivalenzen

Die Fundamentalgruppen sind invariant unter Homotopieäquivalenzen.

Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißen homotop ($f \sim g$), falls $\exists H : X \times I \to Y$ stetig mit

$$H(\cdot, 0) = f_0, \quad H(\cdot, 1) = f_1.$$

Definition (16.11)

X und Y heißen homotopieäquivalent

$$:\Leftrightarrow \ \exists f : X \to Y \text{ und } g : Y \to X \text{ stetig mit } g \circ f \sim \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g \sim \mathrm{id}_Y.$$

In diesem Fall heißt f Homotopieäquivalenz zwischen X und Y und g homotopieinvers zu f.

Theorem (16.12)

$f : X \to Y$ Homotopieäquivalenz mit $f(x_0) = y_0$.

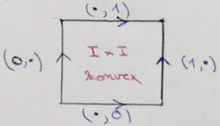
$$\Rightarrow \ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \text{ Gruppenisomorphismus}$$

Satz 16.12: Beweis

Satz 16.12

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ homotopie invers, $f(x_0)=y_0$, $H: X\times I \to X$ stetig, $H(\cdot,0)=g\circ f$, $H(\cdot,1)=\mathrm{id}_X$

$[\varepsilon] \in \pi_1(X,x_0)$



$$\overbrace{I\times I \longrightarrow X\times I \xrightarrow{H} X}^{=F}, \quad (s,t) \mapsto (\varepsilon(s),t)$$

$$\varepsilon = H(\cdot,1)\circ\varepsilon = F(\cdot,1) \simeq \left(F(0,\cdot)^- * F(\cdot,0)\right) * F(1,\cdot) = \left(H(x_0,\cdot)^- * g\circ f\circ\varepsilon\right) * H(x_0,\cdot)$$

$\Rightarrow [\varepsilon] = [H(x_0,\cdot)^-] * (g\circ f)_*([\varepsilon]) * [H(x_0,\cdot)]$ in $\pi_1(X,x_0)$

16.5 $\Rightarrow \underbrace{[H(x_0,\cdot)] * [\varepsilon] * [H(x_0,\cdot)^-]}_{\overset{16.7}{=}\, t(H(x_0,\cdot))[\varepsilon]} = (g\circ f)_*([\varepsilon]) \quad \forall [\varepsilon]\in\pi_1(X,x_0)$

$\Rightarrow (g\circ f)_* = g_*\circ f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,g(y_0))$ Isomorphismus

$\Rightarrow f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ injektiv

Genauso: $(f\circ g)_*$ Isomorphismus $\Rightarrow f_*$ surjektiv

Wie berechndt man die Fundamentalgruppe von S^1?

Wie berechnet man Fundamentalgruppen?

$K = \{z \in \mathbb{C};\ s \le |z| \le 1\} \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ Homotopieäquivalenz

$p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ stetig, surjektiv, $\exists\ S^1 = \bigcup_{i=1}^{4} U_i$ so, dass für $i = 1, \dots, 4$

$\overset{-1}{p}(U_i) = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \xrightarrow{p} U_i$ Homöomorphismen sind $\forall n \in \mathbb{Z}$

Dann ist für alle $z \in S^1$

$$\pi_1(S^1, z) \overset{16.7}{\cong} \pi_1(S^1, 1) \overset{17.11}{\cong} \overset{-1}{p}(\{1\}) = \mathbb{Z},$$

da

- $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ eine Überlagerung ist und
- $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist.

Für welche topologischen Räume X gibt es solche Überlagerungen (Korollar 18.6)?

Überlagerung - Definition

Seien E, B topologische Räume.

Definition (17.1)

$p : E \to B$ stetig, surjektiv heißt Überlagerung $:\Leftrightarrow \forall b \in B$

$\exists$ offene $U \in \mathcal{U}(b)$ und disjunkte offene $V_\alpha \subset E$ mit $\overset{-1}{p}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ so, dass

$$p : V_\alpha \to U \text{ Homöomorphismen sind } \forall \alpha.$$

Wir sagen, U wird überlagert durch p und nennen die Mengen V_α die Blätter von $\overset{-1}{p}(U)$.

Remark (17.2)

Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung.

- *$\forall b$ ist die Relativtopologie von E auf $\overset{-1}{p}(\{b\})$ diskret*
- *p ist ein lokaler Homömorphismus, d.h. $\forall x \in E\ \exists$ offene $V \in \mathcal{U}(x), U \in \mathcal{U}(p(x))$ so, dass $p : V \to U$ ein Homömorphismus ist.*

Wähle in (ii) zu $b = p(x)$ V_α mit $x \in V_\alpha$ und $U \in \mathcal{U}(b)$ wie in Def. 17.1.

Hochhebung von Wegen

Examples (17.3)

Sei $S^1 = \{e^{it};\ t \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $p : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto e^{2\pi it}$ eine Überlagerung.

Sei $p : E \to B$ im Folgenden eine Überlagerung.

Definition (17.5)

Sei $f : D \to B$ beliebig. Ein Lift von f unter p ist eine Abb. $F : D \to E$ mit

$$p \circ F = f.$$

Theorem (17.6)

Seien $b_0 \in B$ und $e_0 \in E$, mit $p(e_0) = b_0$. Ist $\gamma : I \to B$ ein Weg mit $\gamma(0) = b_0$, so existiert ein eindeutiger stetiger Lift $\tilde{\gamma} : I \to E$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = e_0$.

Beweis von 17.6

Sei $B = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ offene Überdeckung durch von p überlagerte Mengen U.

$\Rightarrow$ (Lemma 17.4) $\exists\, 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ und $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \quad \forall i = 1, \ldots n$$

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\exists!$ stetiger Lift $\tilde{\gamma} : [0, t_{i-1}] \to E$ von $\gamma_{[0,t_{i-1}]}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = e_0$.

Sei $\overset{-1}{p}(U_i) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ und seien $p : V_\alpha \to U_i$ Homöomorphismen $\forall \alpha$

$$\exists!\, \alpha_0 \text{ mit } \tilde{\gamma}(t_{i-1}) \in V_{\alpha_0}$$

Ist $\tilde{\gamma} : [0, t_i] \to E$ stetiger Lift von $\gamma_{[0,t_i]}$, so ist

$$\tilde{\gamma}([t_{i-1}, t_i] \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

zusammenhängend mit $\tilde{\gamma}(t_{i-1}) \in V_{\alpha_0}$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}([t_{i-1}, t_i] \subset V_{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(t) = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1} \circ \gamma(t) \;\forall\; t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Umgekehrt definiert dies einen stetigen Lift von γ auf $[0, t_i]$.

Satz 17.7

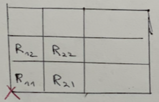
$p : E \longrightarrow B$ Überlagerung, $p(e_0) = b_0$

Satz 17.7 $H : I \times I \longrightarrow B$ stetig mit $H(0,0) = b_0$

$\Rightarrow \exists!$ stetigen Lift $\tilde{H} : I \times I \to E$ von H mit $\tilde{H}(0,0) = e_0$

Ist H eine Weghomotopie, so ist auch $\tilde{H}$ eine Weghomotopie

Beweis Schreibe $I \times I$ als Vereinigung abgeschlossener Rechtecke



so, dass durch p überlagerte offene $U_{jk} \subset B$ existieren mit

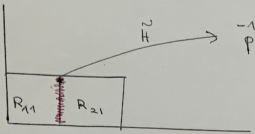
$H(R_{jk}) \subset U_{jk} \quad \forall j,k$

Wegen $p(e_0) = b_0 = H(0,0) \in U_{11}$ $\exists!$ eindeutiges Blatt V_{11} über U_{11} mit

$e_0 \in V_{11}$

Setze $\tilde{H} = (p|_{V_{11}})^{-1} \circ H$ auf R_{11}

Satz 17.7

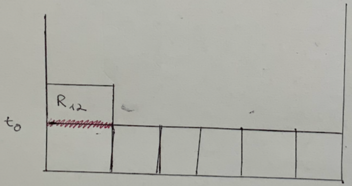


$\overset{-1}{p}(U_{21}) = \dot\bigcup V_\alpha$

$\Rightarrow \tilde H(\;) \subset V_{21}$ Blatt über U_{21}

$\Rightarrow \tilde H(s,t) = (p|_{V_{21}})^{-1} \circ H(s,t)$ definiert stetige Fortsetz. von $\tilde H : R_{11} \to E$

zu einem Lift auf $R_{11} \cup R_{21}$



Sei $\tilde H : I \times [0,t_0] \to E$ definiert

$\Rightarrow \tilde H(\;) \subset \overset{-1}{p}(U_{12}) = \bigcup V_\alpha$

$\Rightarrow \tilde H(\;) \subset V_{12}$ Blatt über U_{12}

$\Rightarrow \tilde H(s,t) = (p|_{V_{12}})^{-1} \circ H(s,t)$ definiert stetige Forts. von $\tilde H : I \times [0,t_0] \to E$

zu einem Lift von H auf $(I \times [0,t_0]) \cup R_{12}$

$p: E \longrightarrow B$ Überlagerung, $p(e_0) = b_0$

Korollar 17.8

Seien $\alpha, \beta: I \to B$ Wege von b_0 nach b_1 und seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: I \to E$ die stetigen Lifts von α, β mit $\tilde{\alpha}(0) = e_0 = \tilde{\beta}(0)$. Dann gilt:

$$\alpha \simeq \beta \Longrightarrow \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}. \quad \text{Insbesondere ist } \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

Beweis: Sei $\alpha \overset{H}{\simeq} \beta$

17.7 $\Longrightarrow$ $\exists!$ stetigen Lift von H zu einer Weghomotopie $\tilde{H}: I \times I \to E$ mit $\tilde{H}(0,0) = e_0$

Eindeutigkeitsteil von 17.6 $\Longrightarrow$ $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\alpha}$ und $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{\beta}$. $\boxtimes$

Def. 17.9 Ein top. Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls X wegzshgd ist und $\pi_1(X, x_0)$ für ein ($\Leftrightarrow$ jedes) $x_0 \in X$ die triviale Gruppe ist.

Bemerkung 17.10

Ist X einfach zusammenhängend und sind $\alpha, \beta: I \to X$ Wege von x_0 nach x_1, so sind α und β weghomotop.

Sei $p: E \longrightarrow B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$.

Für einen Weg $\alpha: I \to B$ mit $\alpha(0) = b_0$ bezeichne $\tilde{\alpha}: I \to E$ den stetigen Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

Korollar 17.11

(a) E wegzusammenhängend $\Rightarrow \Phi: \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(\{b_0\})$, $[\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1)$ surjektiv

(b) E einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Φ bijektiv

Beweis (a) Sei $e \in p^{-1}(\{b_0\})$

$\Rightarrow \exists$ Weg $\tilde{\alpha}: I \to E$ von e_0 nach e

$\Rightarrow \tilde{\alpha}$ = der stetige Lift von $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

$\Rightarrow \Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = e$

(b) Sei E einfach zusammenhängend und seien $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \pi_1(B, b_0)$ mit $\Phi([\alpha_1]) = \Phi([\alpha_2])$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_2(1)$

$\overset{17.10}{\Rightarrow} \tilde{\alpha}_1 \simeq \tilde{\alpha}_2$

$\Rightarrow \alpha_1 = p \circ \tilde{\alpha}_1 \simeq p \circ \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2$ $\square$

Beispiele 17.12

(a) $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ ist Überlagerung, $p(0) = 1$

17.11(b) $\Rightarrow$ $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow p^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z}$, $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ bijektiv

Φ ist ein Gruppenisomorphismus:

Seien $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, 1)$ mit $\tilde{\alpha}(1) = n$, $\tilde{\beta}(1) = m$

$\Rightarrow$ $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(s) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2s) ; & s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\beta}(2s-1) + n ; & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ Weg in $\mathbb{R}$ mit

$p \circ \gamma = \alpha * \beta$ und $\gamma(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$, $\gamma(1) = \tilde{\beta}(1) + n = m + n$

$\Rightarrow$ $\Phi([\alpha] * [\beta]) = \Phi([\alpha * \beta]) = \gamma(1) = n + m = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$.

(b) $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^1$, $f(z) = \frac{z}{|z|}$, $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z$ homotopieinvers zueinander

16.12 $\Rightarrow$ $f_* : \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$ Gruppenisomorphismus

(a) $\Rightarrow$ $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Existenz stetiger Lifts

Definition (18.1)

Eine Überlagerung $p : E \to B$ heißt universell, falls E einfach zusammenhängend ist.

Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$. Für einen Weg $\gamma : I \to B$ mit $\gamma(0) = b_0$ sei $\tilde{\gamma} : I \to E$ der eindeutige stetige Lift mit $\tilde{\gamma}(0) = e_0$.

Theorem (18.2)

Sei Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

$\Rightarrow \ \forall f : Y \to B$ *stetig* $\forall y_0 \in \overset{-1}{f}(\{b_0\})$ $\exists!$ *stetiger Lift* $F : Y \to E$ *von* f *mit* $F(y_0) = e_0$.

Eindeutigkeit: Sei $y \in Y$

Bis auf Homotopie $\exists!$ stetiger Weg $\alpha : I \to Y$ von y_0 nach y

$\Rightarrow \ (f \circ \alpha)^\sim$ ist eindeutig bis auf Homotopie.

Für F wie im Satz ist $F \circ \alpha = (f \circ \alpha)^\sim$ und daher

$$F(y) = F \circ \alpha(1) = (f \circ \alpha)^\sim(1).$$

$p:(E,e_0)\to(B,b_0),\ f:(Y,y_0)\to(B,b_0),\ F:(Y,y_0)\to(E,e_0)$

Existenz: Umgekehrt definiert

$$F: Y \to E,\ F(y) = (f\circ\alpha)^{\sim}(1) \quad (\alpha \text{ Weg von } y_0 \text{ nach } y)$$

einen Lift von f mit $F(y_0) = e_0$. Wir zeigen, dass F stetig ist:

Sei $a \in Y$, $V \in \mathcal{U}(F(a))$ so, dass $p: V \to p(V) \in \mathcal{U}(f(a))$ ein Homöomorphismus ist.

$$\Rightarrow\ \exists\, W \in \mathcal{U}(a) \text{ wegzshgd. mit } f(W) \subset p(V)$$

Sei $y \in W$. Wähle Wege $\delta: I \to W$ von a nach y, $\alpha: I \to Y$ von y_0 nach a

$$\rho = (p|_V)^{-1} \circ f \circ \delta \text{ ist stetiger Lift von } f\circ\delta \text{ mit } \rho(0) = F(a)$$

Wegen

$$p((f\circ\alpha)^{\sim} * \rho) = (f\circ\alpha) * (f\circ\delta) = f\circ(\alpha*\delta)$$

ist ($\alpha * \delta$ ist ein Weg von y_0 nach y)

$$F(y) = (f\circ\alpha)^{\sim} * \rho(1) = \rho(1) \in V.$$

Existenz und Eindeutigkeit von universellen Überlagerungen

Corollary (18.3)

Sei B lokal wegzshgd. und $p : E \to B$ und $p' : E' \to B$ universelle Überlagerungen.

$\Rightarrow \exists$ *Homöomorphismus* $h : E \to E'$ *mit* $p' \circ h = p$.

Ein topologischer Raum X heißt semilokal einfach zusammenhängend, falls

$\forall x \in X \; \exists U \in \mathcal{U}(x)$ so, dass jede Schleife $\gamma : I \to U$ homotop in X ist zu $e_{\gamma(0)}$.

Theorem (18.5)

Sei B wezshgd., lokal wegzshgd., semilokal einfach zushgd. und sei $b_0 \in B$.

$\Rightarrow \forall H \subset \pi_1(B, b_0)$ *Untergruppe* $\exists$ *Überlagerung* $p : E \to B$ *und* $e_0 \in \overset{-1}{p}(\{b_0\})$
mit E wegzshgd. so, dass $p_*\Big(\pi_1(E, e_0)\Big) = H$.

Da $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ injektiv ist (Aufgabe 32), folgt , dass jeder toplogische Raum B wie in Theorem 18.5 eine universelle Überlagerung besitzt.

Insbesondere gilt dies für jede zushg'de ($\Leftrightarrow$ wegzshg'de) differenzierbare Mfkt. B.

Theorem 18.5: Beweis

I. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf

$$X = \{\alpha;\ \alpha : I \to B \text{ Weg mit } \alpha(0) = b_0\}$$

durch

$$\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1) \text{ und } [\alpha * \beta^-] \in H$$

Sei $E = X/\sim$ und $\alpha^\#$ die Äquivalenzklasse von $\alpha \in X$. Es gilt:

- B wegzshgd. $\Rightarrow$ $p : E \to B,\ p(\alpha^\#) = \alpha(1)$ surjektiv
- $\alpha \simeq \beta \ \Rightarrow \alpha \sim \beta$
- $\alpha \sim \beta$ und $\delta(0) = \alpha(1) \ \Rightarrow (\alpha * \delta) \sim (\beta * \delta)$, denn

$$[(\alpha * \delta) * (\beta * \delta)^-] = [(\alpha * \delta) * (\delta^- * \beta^-)] = [\alpha * \beta^-] \in H$$

- $\beta \sim \alpha * \delta \ \Rightarrow \ \beta * \delta^- \sim \alpha$

Theorem 18.5: Beweis

II. Für $\alpha \in X$, $U \in \mathcal{U}(\alpha(1))$ offen und wegzusammenhängend sei

$$B(U,\alpha) = \{(\alpha * \delta)^{\#};\ \delta : I \to U \text{ ist ein Weg mit } \delta(0) = \alpha(1)\}$$

Dann gilt:

- $\alpha^{\#} \in B(U,\alpha)$ und $p(B(U,\alpha)) = U$
- Zwei Mengen der Form $B(U,\alpha)$ und $B(U,\beta)$ sind gleich oder disjunkt.

Die Mengen $B(U,\alpha)$ bilden die Basis einer Topologie τ auf E:

$$\beta^{\#} \in B(U_1,\alpha_1) \cap B(U_2,\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}(\beta(1)) \ni V \subset U_1 \cap U_2 \text{ offen, wegzshgd.}$$

$$\Rightarrow \beta^{\#} \in B(V,\beta) \subset B(U_1,\beta) \cap B(U_2,\beta) = B(U_1,\alpha_1) \cap B(U_2,\alpha_2).$$

Die Abbildung $p : (E,\tau) \to B$ ist surjektiv, offen (klar) und stetig:

$$W \in \mathcal{U}(p(\alpha^{\#})) \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}(\alpha(1)) \ni U \subset W \text{ offen, wezshgd.} \Rightarrow p(B(U,\alpha)) = U \subset W.$$

Theorem 18.5: Beweis

Zur Erinnerung: Für $\alpha \in X$, $U \in \mathcal{U}(\alpha(1))$ offen, wegzusammenhängend ist:

$$B(U,\alpha) = \{(\alpha * \delta)^{\#};\ \delta : I \to U \text{ ist ein Weg mit } \delta(0) = \alpha(1)\}$$

Wir zeigen, dass $p : E \to B, \alpha^{\#} \mapsto \alpha(1)$ eine Überlagerung ist: Sei $y \in B \Rightarrow$

$$\exists\ U \in \mathcal{U}(y) \text{ offen, wegzshgd. } : \forall \gamma \text{ Schleife in U mit Basis } y \text{ ist } \gamma \simeq e_y \text{ in } B$$

Dann gilt:

- $\overset{-1}{p}(U) = \bigcup(B(U,\alpha);\ \alpha : I \to B \text{ Weg von } b_0 \text{ nach } y)$
- $p : B(U,\alpha) \to U$ Homöomorphismen $\forall \alpha : I \to B$ Weg von b_0 nach y).

Zum Abschluss des Beweises zeigt man, dass E wegzshgd. ist

$$\alpha \in X \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} :\ I \to E,\ t \mapsto \alpha(\cdot t)^{\#} \text{ ist ein Weg von } e_{b_0}^{\#} \text{ nach } \alpha^{\#}$$

und dass $p_*\pi_1(E, e_{b_0}^{\#}) = H$ ist

- $[\alpha] \in H \quad \Rightarrow \quad [\tilde{\alpha}] \in \pi_1(E, e_{b_0}^{\#})$ mit $p_*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$
- $[\gamma] \in \pi_1(E, e_{b_0}^{\#})$ Setze $\alpha = p \circ \gamma\ ; \Rightarrow\ \gamma, \tilde{\alpha}$ stetige Lifts von α mit Anfangspkt $e_{b_0}^{\#}$

$$\Rightarrow\ \gamma = \tilde{\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha^{\#} = \tilde{\alpha}(1) = \gamma(1) = \gamma(0) = e_{b_0}^{\#}\ \Rightarrow\ p_*[\gamma] = [\alpha] = [\alpha * e_{b_0}^{-}] \in H.$$