Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 1 Abgabedatum: 12.05.2020

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Zur Zulassung für die Abschlussprüfung müssen insgesamt mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht werden.

Ein topologischer Raum X heißt Lindelöf-Raum, falls zu jeder offenen Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung existiert.

Aufgabe 1 (1+2+1=4 Points)

(a) Es sei (X, t) ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset t$ eine Basis von t. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) (X, t) ist ein Lindelöf-Raum.
- (ii) Jede Überdeckung durch Mengen aus $\mathcal{B}$ hat eine abzählbare Teilüberdeckung.

(b) Für $\alpha \in A$ seien $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha)$ $(a_\alpha < b_\alpha)$ halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$. Es sei $M = \bigcup_{\alpha \in A}(a_\alpha, b_\alpha)$. Zeigen Sie:

- (i) Es gibt eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_{\alpha_n}, b_{\alpha_n})$.
- (ii) $\mathbb{R} \setminus M$ ist abzählbar. (*Hinweis : Zu $x \in \mathbb{R} \setminus M$ existiert ein $q_x \in \mathbb{Q}$ mit $(x, q_x] \subset M$.*)

(c) Es sei τ die von der Basis $\mathcal{B} = \{[a, b);\ a < b\}$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$ (vergleiche Aufgabe 24 Topologie I). Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tau)$ ein Lindelöf-Raum ist.

Aufgabe 2 (1+3=4 Points)

(a) Zeigen Sie, dass jeder reguläre Lindelöf-Raum parakompakt ist.

(b) Wie zuvor sei τ die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ $(a < b)$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tau)$ regulär (und somit parakompakt) ist.

Aufgabe 3 (4 Points)

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) X ist parakompakt.

(b) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von X gibt es eine stetige Zerlegung der Eins bezüglich $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

(Bitte wenden)

(c) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X gibt es eine lokal-endliche offene Überdeckung $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X mit $V_\alpha \subset U_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

Aufgabe 4 **(2+2=4 Points)**

Sei X ein parakompakter Raum und Y ein kompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ von $X \times Y$ existiert eine lokal-endliche offene Überdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ von X mit

$$\forall\, V \in \mathcal{V}\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \text{ mit } V \times Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

(b) $X \times Y$ ist parakompakt.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/