Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 2 Abgabedatum: 19.05.2020

Aufgabe 5 (4 Points)

Es sei X ein parakompakter Raum und sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ (mit der Relativtopologie) parakompakt ist.
(*Hinweis : Benutzen Sie Bemerkung 9.10.*)

Aufgabe 6 (4 Points)

Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, der abzählbar im Unendlichen ist. Zeigen Sie, dass X parakompakt ist.

Aufgabe 7 (2+2=4 Points)

(a) Sei X ein topologischer Raum, so dass gilt: Jede offene Teilmenge $U \subset X$ (versehen mit der Relativtopologie) ist parakompakt. Zeigen Sie, dass dann schon jede Teilmenge $Y \subset X$ (versehen mit der Relativtopologie) parakompakt ist.

(b) Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist X parakompakt, so auch $f(X)$. (*Hinweis : Benutzen Sie die diskrete Topologie.*)

Aufgabe 8* (Dabei heißt * Zusatzpunkte) (1*+2*+2*+1*=6* Points)

Sei X ein zusammenhängender, lokalkompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{C}$ von X, die aus offenen Teilmengen von X mit kompaktem Abschluss besteht.

(b) Sei $\emptyset \neq U_0 \in \mathcal{C}$ beliebig und sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv durch

$$U_{n+1} := \bigcup \{C \in \mathcal{C};\ C \cap \overline{U_n} \neq \emptyset\}$$

definierte Folge in $\mathcal{P}(X)$. Dann ist jede Menge $\overline{U_n} \subset X$ kompakt mit $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gilt die Identität

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}.$$

(*Hinweis : Benutzen Sie Lemma 9.2 und den Zusammenhang von X.*)

(Bitte wenden)

(d) X ist seperabel.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/