**Saarland University**
**FACULTY 6.1 – MATH**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

# Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

**Blatt 3** Abgabedatum: 26.05.2020

## Aufgabe 9 (1+1+2=4 Points)

Es sei $X$ ein topologischer Raum und $(Y, d)$ ein metrischer Raum. Sei $\overline{d} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ für alle $x, y \in Y$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{d}$ definiert eine Metrik auf $Y$, die dieselbe Topologie wie $d$ erzeugt.

(b) $\delta \colon Y^X \times Y^X \to \mathbb{R}$, $\delta(f, g) = \sup\{\overline{d}(f(x), g(x));\ x \in X\}$ definiert eine Metrik auf $Y^X$.

(c) $C(X, Y) \subset Y^X$ ist abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums $(Y^X, \delta)$.

---

## Aufgabe 10 (2+2=4 Points)

Es sei $X$ ein topologischer Raum, $(Y, d)$ ein metrischer Raum und sei $\tau_u$ die von der Metrik $\delta$ aus Aufgabe 9 induzierte Topologie auf $Y^X$. Zeigen Sie:

(a) $\tau_\pi \subset \tau_c \subset \tau_u$.

(b) Ist $X$ kompakt, so gilt $\tau_u = \tau_c$. Ist $X$ diskret, so ist $\tau_\pi = \tau_c$.

---

## Aufgabe 11 (3x2=6 Points)

Sei $X$ ein topologischer Raum, $(Y, d)$ ein metrischer Raum und $Y^X$ versehen mit der Topologie $\tau_c$ der kompakt gleichmäßigen Konvergenz. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $Y^X$ ist regulär.

(b) $Y^X$ ist normal.
(*Hinweis : Wählen Sie $X = \mathbb{R}$ versehen mit der diskreten Topologie und $Y = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Benutzen Sie außerdem das Ergebnis von Aufgabe 12.*)

(c) Ist $X$ abzählbare Vereinigung offener Mengen mit kompaktem Abschluss, so erfüllt $Y^X$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

---

## Aufgabe 12* (3x2*=6* Points)

Zeigen Sie, dass der Funktionenraum $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\tau_\pi$ der punktweisen Konvergenz nicht normal ist. Betrachten Sie dazu den Teilraum $X = \mathbb{N}^\mathbb{R}$ und führen Sie die folgenden Schritte aus:

**(Bitte wenden)**

(a) Die für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$A_n = \{f \in X;\ f|_{\mathbb{R}\setminus f^{-1}(\{n\})} \text{ ist injektiv}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

definierte Teilmengen sind abgeschlossen und paarweise disjunkt.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen mit $A_1 \subset U$. Konstruieren Sie (abschnittsweise) eine Folge $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ paarweise verschiedener Zahlen $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ so, dass für die Mengen $F_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\}$ und die Funktionen $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$,

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} j & \text{, falls } \alpha = \alpha_j \text{ für ein } 1 \leq j \leq n_{i-1} \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} ,$$

die Inklusionen $\{h \in X;\ h = x_i \text{ auf } F_i\} \subset U$ $(i \geq 1)$ gelten.

(c) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ offen mit $A_1 \subset U$, $A_2 \subset V$ und seien $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ $(n_j)_{j\geq 0}$ zu $U$ wie in (b) gewählt. Sei $y \in A_2$ die Funktion

$$y(\alpha) = \begin{cases} j & \text{, falls } \alpha = \alpha_j \text{ für ein } j \geq 1 \\ 2 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Wählen Sie eine endliche Menge $F \subset \mathbb{R}$ mit $\{h \in X;\ h = y \text{ auf } F\} \subset V$ und ein $i \in \mathbb{N}$ mit $F \cap \{\alpha_j;\ j \geq 1\} \subset F_i$. Zeigen Sie, dass

$$\{h \in X;\ h = x_{i+1} \text{ auf } F_{i+1}\} \cap \{h \in X;\ h = y \text{ auf } F\} \neq \emptyset$$

gilt.

---

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

**https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/**