Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 4 Abgabedatum: 02.06.2020

Aufgabe 13 (1+3=4 Points)

Seien X, Y topologische Räume und sei $A \subset X$ versehen mit der Relativtopologie. Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung

$$\Gamma\colon C(X,Y) \to C(A,Y),\ f \mapsto f|_A$$

stetig ist, wenn man beide Funktionenräume versieht mit der

(a) Topologie τ_π der punktweisen Konvergenz.

(b) kompakt-offenen Topologie τ_{co}.

Erinnerung: Ein Hausdorffscher topologischer Raum X ist regulär, genau dann, wenn für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ von x eine offene Menge V mit $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ existiert.

Aufgabe 14 (1+1+2=4 Points)

Seien X, Y topologische Räume und sei $C(X,Y)$ versehen mit der kompakt-offenen Topologie τ_{co}. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in X$ ist die Punktauswertung $\epsilon_x\colon C(X,Y) \to Y,\ f \mapsto f(x)$ stetig.

(b) Für $C \subset X$ kompakt und offene Mengen $U, V \subset Y$ mit $\overline{V} \subset U$ gilt $\overline{S(C,V)} \subset S(C,U)$.

(c) Ist Y regulär, so ist $C(X,Y)$ regulär.
(*Hinweis : Sie dürfen benutzen, dass für $K \subset Y$ kompakt und $U \subset Y$ offen mit $K \subset U$ eine offene Menge $V \subset Y$ existiert mit $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*)

Aufgabe 15 (4 Points)

Seien X, Y, Z topologische Räume. Zeigen Sie: Ist Y ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist die Abbildung

$$\rho\colon C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z),\ (f,g) \mapsto g \circ f$$

stetig, wenn man alle drei Funktionenräume mit ihrer kompakt-offenen Topologie τ_{co} versieht.
(*Hinweis : Sie dürfen benutzen, dass für $K \subset Y$ kompakt und $W \subset Y$ offen mit $K \subset W$ eine offene Menge $V \subset Y$ mit kompaktem Abschluss $\overline{V} \subset Y$ existiert so, dass $K \subset V \subset \overline{V} \subset W$ gilt.*)

(Bitte wenden)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt eigentlich, falls $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist für jede kompakte Menge $K \subset Y$.

Aufgabe 16* **(3*+1*=4* Points)**

Seien X ein topologischer Raum, Y ein kompakt erzeugter Hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die injektiv und eigentlich ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen.

(b) $f : X \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/