Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 5 Abgabedatum: 09.06.2020

Aufgabe 17 (4 Points)

Seien X, Y, Z topologische Räume und sei $f\colon X \times Z \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist f genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$\overline{f}\colon Z \to C(X,Y),\ \overline{f}(z) = f(\cdot, z)$$

stetig ist.

Seien Y, Z topologische Räume. Eine surjektive Abbildung $q : Y \to Z$ heißt Quotientenabbildung*, falls eine Menge $V \subset Z$ genau dann offen in Z ist, wenn $q^{-1}(V) \subset Y$ offen ist.*

Aufgabe 18 (4 Points)

Sei $q\colon Y \to Z$ eine surjektive, stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen Y und Z. Zeigen Sie: q ist genau dann eine Quotientenabbildung, wenn jede Abbildung $f : Z \to Z'$ in einen weiteren topologischen Raum Z', für die $f \circ q : Y \to Z'$ stetig ist, stetig ist.
Hinweis : Zu „⇐“: Vergleichen Sie die gegebene Topologie von Z mit der Topologie

$$t_q = \{V \subset Z;\ q^{-1}(V) \subset Y \text{ ist offen}\}.$$

Aufgabe 19 (4 Points)

Sei $q\colon Y \to Z$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen Y und Z. Zeigen Sie: Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist auch

$$\mathrm{id} \times q : X \times Y \to X \times Z,\ (x, y) \mapsto (x, q(y))$$

eine Quotientenabbildung.
Hinweis : Sie dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 17 und Aufgabe 18 benutzen.

Eine Menge $M \subset X$ ein einem metrischen Raum (X, d) heißt beschränkt, wenn

$$diam(M) = sup\{d(x, y);\ x, y \in M\} < \infty$$

ist.

Aufgabe 20 (4 Points)

Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $C(X, \mathbb{R}^n)$ versehen mit der Supremumsmetrik

$$d\colon X \times X \to [0, \infty),\ d(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\|;\ x \in X\}.$$

Zeigen Sie: Eine Menge $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt, abgeschlossen und gleichstetig ist.

(Bitte wenden)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/