Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 6 Abgabedatum: 16.06.2020

Erinnerung: *Ein lokalkompakter Hausdorffraum X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn eine Folge offener Mengen $U_k \subset X$ ($k \in \mathbb{N}$) mit kompaktem Abschluss existiert so, dass $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ gilt (Aufgabe 40 aus Topologie I).*

Aufgabe 21 (3+1=4 Points)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, der abzählbar im Unendlichen ist. Zeigen Sie:

(a) $(C(X, \mathbb{R}^n), \tau_c)$ ist metrisierbar.
(Hinweis : Konstruieren Sie eine Einbettung in ein geeignetes topologisches Produkt.)

(b) Jede punktweise beschränkte und gleichstetige Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C(X, \mathbb{R}^n)$ hat eine τ_c-konvergente Teilfolge.

Aufgabe 22 (4 Points)

Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn die Stone-Cech-Kompaktifizierung $\beta(X)$ von X zusammenhängend ist.

Aufgabe 23 (4 Points)

Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum und sei Y ein kompakter topologischer Raum. Sei weiter $f \colon X \to Y$ eine topologische Einbettung und $F : \beta(X) \to Y$ die eindeutige stetige Fortsetzung von f. Zeigen Sie, dass die Inklusion $F(\beta(X) \setminus X) \subset Y \setminus f(X)$ gilt.

Aufgabe 24 (2+2=4 Points)

Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum. Zeigen Sie:

1. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen ein $y \in \beta(X) \setminus X$ konvergiert, so ist $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} \subset X$ abgeschlossen.
   (Hinweis : Betrachten Sie die Menge $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \subset \beta(X)$.)
2. Ist $\beta(X) \neq X$, so ist $\beta(X)$ nicht metrisierbar.
   (Hinweis : Wäre $\beta(X)$ metrisierbar, so gäbe es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedener Elemente $x_k \in X$, die gegen ein $y \in \beta(X) \setminus X$ konvergieren würde. Wenden Sie das Lemma von Urysohn auf die Mengen $\{x_{2k};\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{x_{2k+1};\ k \in \mathbb{N}\}$ an.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2/