Saarland University
FACULTY 6.1 – MATH
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie II

Sommersemester 2020

Blatt 7 Abgabedatum: 23.06.2020, vor der Vorlesung

Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ heißt Retraktion *von X auf A, falls $r(a) = a$ ist für alle $a \in A$.*

Aufgabe 25 (4 Points)

Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $r : X \to A$ eine Retraktion von X auf A. Zeigen Sie: Für $a_0 \in A$ ist $r_*\colon \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ surjektiv.
(Hinweis : Benutzen Sie die Inklusion $j\colon A \hookrightarrow X$.)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, *falls ein $a_0 \in A$ existiert, sodass $t \cdot a_0 + (1-t) \cdot x \in A$ für alle $t \in [0,1]$ und $x \in A$ gilt.*

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn er wegzuammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ die triviale (einelementige) Gruppe ist für ein (oder äquivalent jedes) $x_0 \in X$.

Aufgabe 26 (4 Points)

Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 27 (4 Points)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f\colon A \to X$ eine Abbildung in einen topologischen Raum X. Seien $a_0 \in A$, $x_0 \in X$ mit $f(a_0) = x_0$. Zeigen Sie: Gibt es eine stetige Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to X$ mit $f = F|_A$, so ist $f_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, x_0)$ der triviale Gruppenhomomorphismus, der alles auf das neutrale Element abbildet.

Aufgabe 28 (4 Points)

Sei X ein wegzusammenhängender und Y ein beliebiger topologischer Raum. Seien $x_0, x_1 \in X$, sowie $y_0, y_1 \in Y$ und sei $h\colon X \to Y$ stetig mit $h(x_i) = y_i$ für $i \in \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass es Gruppenisomorphismen $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ und $\psi\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ gibt mit $h^1_* \circ \varphi = \psi \circ h^0_*$, wobei $h^i_*\colon \pi_1(X, x_i) \to \pi_1(Y, y_i)$ die von h induzierten Gruppenhomomorphismen sind für $i \in \{0,1\}$.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2