



Übungen zur Vorlesung Topologie II
Sommersemester 2020

Blatt 8

Abgabedatum: 30.06.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 29

(4 Points)

Seien $p: E \rightarrow B$, $p': E' \rightarrow B'$ Überlagerungen. Zeigen Sie, dass auch

$$p \times p': E \times E' \rightarrow B \times B', (x, y) \mapsto (p(x), p'(y))$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 30

(4 Points)

Zeigen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus

$$\Phi: \pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \longrightarrow (\mathbb{Z}^2, +)$$

gibt. Benutzen Sie dabei Aufgabe 29 und argumentieren Sie wie in Beispiel 17.12(a).

Aufgabe 31

(4 Points)

Sei B zusammenhängend und $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Zeigen Sie:

Ist $p^{-1}(\{b_0\})$ eine endliche k -elementige Menge für ein $b_0 \in B$, so ist $p^{-1}(\{b\})$ eine k -elementige Menge für alle $b \in B$.

Aufgabe 32

(2+2=4 Points)

Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$. Zeigen Sie:

(a) $p_*: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$, $[\gamma] \mapsto [p \circ \gamma]$ ist injektiv.

(b) Sei E wegzusammenhängend. Ist $H = \text{Im}(p_*)$ und bezeichnet

$$\pi_1(B, b_0)/H = \{H[\alpha]; [\alpha] \in \pi_1(B, b_0)\}$$

die Menge der rechten Nebenklassen der Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$, so gibt es eine Bijektion

$$\Phi: \pi_1(B, b_0)/H \longrightarrow p^{-1}(\{b_0\}).$$

(Hinweis : Benutzen Sie Korollar 17.8 und Korollar 17.11.)

(Bitte wenden)

Aufgabe 33***(4* Points)**

Sei $D^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ und sei $f: D^2 \rightarrow D^2$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $z \in D^2$ existiert mit $f(z) = z$. Nehmen Sie dazu an, dass $f(z) \neq z$ ist für alle $z \in D^2$ und konstruieren Sie eine Retraktion $r: D^2 \rightarrow S^1$.

(Hinweis : Sie dürfen benutzen oder können für zwei zusätzliche Punkte zeigen, dass für jedes $z \in D^2$ eine eindeutige reelle Zahl $t = t(z) \geq 1$ existiert mit $|f(z) + t(z - f(z))| = 1$ und dass $t(z)$ stetig von z abhängt.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/SS20/top2>