

Hinweis zur Klausur:

Sie können die folgende Tabelle nutzen:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos \varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Aufgabe 1**(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 & = & -8 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Aufgabe 2**(4+6=10 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A einen Eigenvektor.

Aufgabe 3**(2+1+3=6 Punkte)**

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z = -2 + 2i \quad \text{und} \quad w = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right).$$

(a) Schreiben Sie z in Polarkoordinaten um.

(b) Schreiben Sie w in der Form $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie die Zahl $u = z \cdot w$ und geben Sie u sowohl in Polarkoordinaten als auch in der Form $u = c + id$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 4**(6 Punkte)**

Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die durch

$$a_0 = 3, \quad a_1 = -10, \quad a_n = 20a_{n-1} - 100a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$.

Aufgabe 5**(4+4=8 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2 + 1}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-n + \frac{1}{n}\right) \quad \text{Hinweis: Quotientenkriterium}$$

Aufgabe 6**(2+6=8 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2}.$$

(a) Geben Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ sowie die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ an.(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion f .

Aufgabe 7**(3+3=6 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_{-3}^{-1} \frac{x+2}{x^2+4x} dx \quad (b) \int_{-\infty}^0 e^{4x} dx$$

Hinweis zu (a): Erweitern Sie geschickt und finden Sie dann eine Stammfunktion.

Aufgabe 8**(8 Punkte)**Bestimmen Sie eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$
