Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Dr. Johannes Lengler

Klausur zu „Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie“, Wintersemester 2009/10

Aufgabe 1 **(2+1+1+1=5 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^{-1})$ und $\det(A \cdot B)$.

Hinweis: Betrachten Sie die letzten beiden Spalten von B.

Aufgabe 2 **(3+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ für die Vektoren

$$\text{(i) } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(iv) } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 **(1+2+2=5 Punkte)**

(a) Berechnen Sie $\frac{(-2+8i)\cdot(i+2)^2}{2i-6}$.

(b) Geben Sie alle komplexen Zahlen z an mit $z^2 = -i$.

(c) Schreiben Sie $z = 1 - i$ in Polarkoordinaten und entscheiden Sie mit Begründung, ob z^{24} reell ist. (Sie brauchen z^{24} nicht zu berechnen!)

Aufgabe 4 **(1+1+1+1+1=5 Punkte)**

Seien $A \in$ eine reelle 4×4-Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2$. Sei außerdem B eine beliebige 4×4-Matrix mit reellen Einträgen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch, und welche sind mit den angegebenen Informationen nicht entscheidbar?

(a) Es gibt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ mit $x \neq 0$ und $A \cdot x = -x$.

(b) $\det(A) = 0$.

(c) B besitzt in $\mathbb{R}$ höchstens 4 Eigenwerte.

(d) B besitzt in $\mathbb{C}$ genau vier Eigenwerte.

(e) Alle Eigenwerte von B sind reell.

Aufgabe 5 **(1+2+2=5 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen (eigentlich oder uneigentlich) konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(\frac{\sqrt{2n+3}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left((-1)^n \cdot \frac{3n-5}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left((-1)^n \cdot \frac{2n^2+2}{n^2+5n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 6 **(2+3=5 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ (*Hinweis:* Quotientenkriterium)

(b) $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{l+3}{l^2-7}$ (*Hinweis:* Vergleichskriterium)

Aufgabe 7 **(2+3=5 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2^{x+1} = 6 \cdot 3^{2x+1}$

(b) $2 \cdot \log(x + 1) = \log(4x)$

Aufgabe 8 **(1+2+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$):

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(\sin(\exp(x)))$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x}$

Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Dr. Johannes Lengler

Klausur zu „Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie“, Wintersemester 2009/10
Blatt 2

Aufgabe 9 **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die Monotonieintervalle der Funktion

$$f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}.$$

Aufgabe 10 **(3+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x) dx$ (*Hinweis:* partielle Integration)

(b) $\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx$ (*Hinweis:* Substitution)

Aufgabe 11 **(3+2=5 Punkte)**

(a) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0$$

durch Trennung der Variablen.

(b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^3$$

durch Variation der Konstanten. (*Hinweis:* Eine Lösung von (a) ist $y(x) = x^2$.)

Aufgabe 12 **(2+3=5 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''''(x) = y(x).$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 3 \cdot y'(x) - 4y(x) = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$$
