Teil 1 (Multiple Choice)

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Unter den folgenden Aussagen sind einige richtig und einige falsch.
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an (Mehrfachnennungen sind möglich)!

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem (das heißt es besteht aus mehr Gleichungen als Unbekannten)

- ☐ hat immer keine oder genau eine Lösung.
- ☐ hat immer keine oder unendlich viele Lösungen.
- ☐ hat immer genau eine oder unendlich viele Lösungen.
- ☐ kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei $z \in \mathbb{C}$.

- ☐ Multiplikation von z mit $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ entspricht einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$ nach links.
- ☐ Multiplikation von z mit $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ entspricht einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts.
- ☐ $\operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2\right) = 0$.
- ☐ $\operatorname{Im}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right|^2\right) = 1$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$.

- ☐ Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ist $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
- ☐ Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ für ein $q < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- ☐ Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und ist $|b_n| \le C$ für ein $C > 0$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ absolut konvergent.
- ☐ Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und ist $|b_n| \le C$ für ein $C > 0$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ absolut konvergent.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

- ☐ Ist f stetig in x_0, so ist f auch differenzierbar in x_0.
- ☐ Ist f stetig in I, so ist $g : I \to \mathbb{R},\ g(x) = \int_a^x f(t)dt$ differenzierbar in I.
- ☐ Ist f differenzierbar in x_0, so ist f auch stetig in x_0.
- ☐ Ist f differenzierbar in I, so ist f auch integrierbar über I.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Welche der folgenden Aussagen über Differentialgleichungen sind richtig?

- ☐ $y'(t) = t^3 \cdot (y(t) + 1)$ ist nicht vom Typ der getrennten Variablen.
- ☐ $y'(t) = \frac{\exp(y(t)^2 - 1)}{t}$ ist vom Typ der getrennten Variablen.
- ☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ ist Lösung von $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$.
- ☐ $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ ist Lösung von $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$.

Teil 2

Name: ______________

Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 + (a-1)x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (6-a^2)x_3 &= a-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 **(10 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 **(10 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(i)\ a_n = \sqrt{\sqrt{4n^2+9n+3} - 2n}, \quad (ii)\ b_n = \frac{n^3+4n^2-3n+7}{2n^3-182n^2+3}, \quad (iii)\ c_n = (-1)^n b_n.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen. Welche Reihen sind konvergent, welche absolut konvergent?

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+2n+1}, \quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 10 **(10 Punkte)**

Der Ertrag $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ einer Pflanzensorte wächst nicht beliebig mit der Düngung x, sondern gemäß dem Gesetz von Mitscherlich,

$$y(x) = y_0 \left(1 - e^{-kx}\right),$$

wobei y_0 die maximale Kapazität und k die relative Wachstumskonstante ist. Wieviel Dünger müssen Sie einsetzen, um Ihren Gewinn $G(x) = c_1 y(x) - c_2 x$ zu maximieren? Wie groß ist der maximale Gewinn? Dabei sind die Konstanten y_0, k, c_1, c_2 alle positiv.

Aufgabe 11 **(10 Punkte)**

(a) Gegeben sei die Funktion $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}, h(x) = (\sin(x))^3$.

  (i) Berechnen Sie die Ableitung h'.

  (ii) Berechnen Sie $\int_0^\pi (\sin(x))^3 dx$.

(b) Berechnen Sie $\int_1^9 \frac{\pi}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx$.

Viel Erfolg!