Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichunssystems für $\lambda = 0$ und $\lambda = 2$.

Aufgabe 2 **(3+2+2=7 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie M^{-1}.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Mx = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).*)

(c) Zeigen Sie, dass die Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} e & -1 & \sqrt{2} & -1 & 7 \\ 3 & \pi & 6 & \pi & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 & 1 & 7 & e^2 \\ 18 & -3 & 7 & -3 & \pi^3 \\ -5 & 2 & \pi^2 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. (*Hinweis: Betrachten Sie die Spalten der Matrix.*)

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **((2,5+3,5)+2=8 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$\text{(i)}\quad iz^2 - 2z + 8i = 0, \qquad \text{(ii)}\quad z(z + 2\sqrt{3}i) = 1 - 2\sqrt{3}i.$$

(b) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$. Zeigen Sie, dass $|z| \neq 0$ gilt, und folgern Sie daraus, dass $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ erfüllt ist.

Aufgabe 5 **((2+2,5)+2,5=7 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren bzw. bestimmt divergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{-2n^3+6n^2+\pi n-\frac{5}{n}}{-\frac{1}{2}n^3-3n+16}$,

(ii) $a_n = \frac{2+\cos(\exp(n))}{n^2}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n+1}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 6 **(3+5=8 Punkte)**

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade stetige Funktion mit $f(-1) = 2$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\exp(\tfrac{1}{n^2+2})\big).$$

(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{2+x} & \text{, falls } x \in (-\infty, -2) \\ 3x + 1 & \text{, falls } x \in [-2, 0] \\ 1 - \exp(-\frac{1}{x}) & \text{, falls } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 7 **(7 Punkte)**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\log(x^2) - 2x$. Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

Aufgabe 8 **(4+4=8 Punkte)**

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)) \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx.$$

Verwenden Sie dazu die Substitutionsregel mit $u(x) = \log(\sin(x))$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(t) = \sin(t) \cdot y(t)^2$, $y(0) = 1$.

Viel Erfolg!