Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + 2\lambda x_3 & = & -2 \\ 2\lambda x_1 + 2x_2 + 6\lambda x_3 & = & 3\lambda \\ 6x_1 + 2x_2 - 4\lambda x_3 & = & 4 \end{array}$$

mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems für $\lambda = -3$ und $\lambda = -2$.

Aufgabe 2 **(3+2+2=7 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass M invertierbar ist. Bestimmen Sie M^{-1}.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Mx = b$ mit $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).*)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Determinante der Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 **(6+1=7 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare quadratische Matrix. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so auch von $B^{-1}AB$. (*Hinweis: Betrachten Sie zu einem Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ zum Eigenwert λ von A den Vektor $B^{-1}x \in \mathbb{R}^n$.*)

Aufgabe 4 **((2,5+3,5)+2=8 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 - 10iz - 10z + 25i + 25 = -25i$, (ii) $z(z - 2\sqrt{3}i) = 5 - 2\sqrt{3}i$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$. Beweisen Sie $\mathrm{Re}(\frac{1}{i\bar{z}}) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$ und $\mathrm{Im}(\frac{1}{i\bar{z}}) = -\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$.

Aufgabe 5 **((2+2,5)+2,5=7 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren bzw. bestimmt divergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{-(n^2-1)(3-en^3)}{-4n^4+\frac{\sqrt{3}}{n^2}+\pi n^5}$,

(ii) $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n)\frac{3+n}{3+n+n^3}$ konvergiert.

Aufgabe 6 **(2,5+2,5+4=9 Punkte)**

(a) Lösen Sie die Gleichung $2\log(\sqrt{e}x) = 1 + \log(2-x)$ für $x \in (0,2)$

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2^x = 2 - x$ eine Lösung im Intervall $[0,1]$ besitzt. (*Hinweis: Betrachten Sie die Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x + x - 2$.)

(c) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to\infty} g(x) = 2$. Untersuchen Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{2x-x^2}{x-2} + 2 & \text{, falls } x \in (-\infty, 2) \\ 0 & \text{, falls } x = 2 \\ (x-2)\cdot g(\frac{1}{x-2}) & \text{, falls } x \in (2,\infty) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2(\log(x) - 1)$. Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

Aufgabe 8 **(4+4=8 Punkte)**

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 e^x(x+c)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^c (\sin x)^2\,dx$$

mittels partieller Integration.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(t) = \cos(t)\cdot y(t)^2$, $y(0) = 1$.

Viel Erfolg!