

## Aufgabe 1

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in  $\mathbb{R}$  (in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{R}$ ) des folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 4, \\ax_1 + 4x_2 + ax_3 &= 1, \\-2x_2 + 4x_3 &= 3.\end{aligned}$$

---

**Lösung.** Wir schreiben das lineare Gleichungssystem zunächst in Matrixschreibweise:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ a & 4 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right).$$

Wir führen nun den Gaußalgorithmus durch:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ a & 4 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right) & \xrightarrow{II \rightarrow 2II - aI} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & 8 - a^2 & -4a & 2 - 4a \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 - a^2 & -4a & 2 - 4a \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{III \rightarrow 2III + (8 - a^2)II} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4a^2 - 8a + 32 & -3a^2 - 8a + 28 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Diskriminante der Gleichung  $-4a^2 - 8a + 32 = 0$  (Hinweis: Hier wäre es sinnvoll zuerst durch  $-4$  zu teilen. Dann wird die Diskriminante auch viel kleiner.) ist

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 32 = 64 + 512 = 576 \geq 0,$$

sodass wir die  $abc$ -Formel verwenden können. Damit erhalten wir die Lösungen

$$a = -\frac{-8 + \sqrt{576}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-8 + 24}{8} = 2 \quad \text{oder} \quad a = -\frac{-8 - \sqrt{576}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-8 - 24}{8} = -4.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

(i)  $a = -4$ : Das LGS lautet nun

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right).$$

Da die letzte Zeile nie erfüllt sein kann, erhalten wir

$$\mathbb{L}_{-4} = \emptyset.$$

(ii)  $a = 2$ : Das LGS lautet nun

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir wählen nun  $x_3 \in \mathbb{R}$  beliebig und erhalten mit der zweiten Zeile

$$3 = (-2)x_2 + 4x_3 \Leftrightarrow -2x_2 = 3 - 4x_3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}(3 - 4x_3).$$

Die erste Zeile liefert

$$\begin{aligned} 4 &= 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2x_1 - (3 - 4x_3) + 6x_3 = 2x_1 - 3 + 10x_3 \\ \Leftrightarrow 2x_1 &= 7 - 10x_3 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1}{2}(7 - 10x_3), \end{aligned}$$

sodass wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7 - 10x_3) \\ -\frac{1}{2}(3 - 4x_3) \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

erhalten.

(iii)  $a \neq -4$  und  $a \neq 2$ : Wir können  $-4a^2 - 8 + 32 = -4(a + 4)(a - 2)$  nach Vorlesung 7, Folie 19 schreiben. Die Diskriminante der Gleichung  $-3a^2 - 8a + 28 = 0$  lautet

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot (-3)28 = 64 + 336 = 400 \geq 0,$$

sodass die Lösungen

$$a = -\frac{-8 + \sqrt{400}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-8 + 20}{6} = 2 \quad \text{oder} \quad a = -\frac{-8 - \sqrt{400}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-8 - 20}{6} = -\frac{14}{3}$$

sind. Also gilt wieder mit Vorlesung 7, Folie 19

$$-3a^2 - 8a + 28 = -3(a - 2)\left(a + \frac{14}{3}\right).$$

Die dritte Zeile lautet nun

$$\begin{aligned} (-4a^2 - 8 + 32)x_3 &= -3a^2 - 8a + 28 \\ \Leftrightarrow x_3 &= \frac{-3a^2 - 8a + 28}{-4a^2 - 8 + 32} = \frac{-3(a - 2)\left(a + \frac{14}{3}\right)}{-4(a + 4)(a - 2)} = \frac{3a + \frac{14}{3}}{4a + 4} \\ &= \frac{3a + 4 - 4 + \frac{14}{3}}{4a + 4} = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{a + 4} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{a + 4}. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile liefert

$$3 = -2x_2 + 4x_3 = -2x_2 + 3 + \frac{2}{a + 4} \Leftrightarrow -2x_2 = -\frac{2}{a + 4} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{a + 4}$$

und die erste schließlich

$$\begin{aligned} 4 &= 2x_1 + ax_2 + 6x_3 = 2x_1 + \frac{a}{a + 4} + \frac{9}{2} + \frac{3}{a + 4} = 2x_1 + \frac{9}{2} + \frac{a + 3}{a + 4} \\ \Leftrightarrow 2x_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{a + 3}{a + 4} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{a + 4} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{a + 4} \\ \Leftrightarrow x_1 &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{a + 4}. \end{aligned}$$

Also

$$\mathbb{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+4} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{a+4} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{a+4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

## Aufgabe 2

(2+4+1=7 Punkte)

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass  $A$  invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie  $A^{-1}$ .

*Hinweis: Alle Einträge von  $A^{-1}$  sind ganzzahlig.*

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

---

**Lösung.** (i) Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2) \det \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + (-3) \det \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 7(-1) + 2(1) - 3(-2) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $A$  invertierbar.

(ii) Wir führen den Gaußalgorithmus auf beiden Seiten durch:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[\text{III} \rightarrow 7\text{III} + 3\text{I}]{\text{II} \rightarrow 7\text{II} + 5\text{I}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \rightarrow 3\text{III} + \text{II}} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & 7 & 21 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \rightarrow \text{II} + \text{III}]{\text{I} \rightarrow \text{I} + 3\text{III}} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 0 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 0 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \rightarrow \text{I} + 2\text{II}} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3

(8 Punkte)

Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ i & -3 & 1-i \\ 1 & 0 & 2+i \end{pmatrix}.$$

---

**Lösung.** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - (2-i) & 0 & 0 \\ -i & \lambda + 3 & -1+i \\ -1 & 0 & \lambda - (2+i) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - (2-i)) \det \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -1+i \\ 0 & \lambda - (2+i) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - (2-i))(\lambda + 3)(\lambda - (2+i)), \end{aligned}$$

wobei wir nach der 1. Zeile entwickelt haben. Damit sind die Eigenwerte  $2-i$ ,  $-3$  und  $2+i$ .

Zu  $2-i$ : Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 5-i & -1+i \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} &\xrightarrow{II \rightarrow II - iIII} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-i & -3+i \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{5-i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & \frac{-3+2i}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von  $\begin{pmatrix} 2i \\ \frac{-3+2i}{13} \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Zu  $-3$ : Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -5+i & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+i \\ -1 & 0 & -5-i \end{pmatrix} &\xrightarrow{II \rightarrow II - iIII} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+6i \\ -1 & 0 & -5-i \end{pmatrix} \xrightarrow{III \rightarrow III + I} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5-i \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Zu  $2+i$ : Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -i & 5+i & -1+i \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow[II \rightarrow II - iIII]{I \rightarrow I + 2iIII} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5+i & -1+i \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{5+i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2+3i}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2+3i}{13} \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## Aufgabe 4

(3+4=7 Punkte)

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i)  $z^2 + z(6 - 4i) + 9 = 12i$ ,

(ii)  $z^4 + 8z^2 + 7 = 0$ .

---

**Lösung.** (i) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 + z(6 - 4i) + (3 - 2i)^2 = -9 + 12i + (3 - 2i)^2 = -9 + 12i + 9 - 12i - 4 = -4$$

und damit zu

$$(z + (3 - 2i))^2 = -4.$$

Damit ergeben sich die zwei Lösungen

$$z_1 = 2i - (3 - 2i) = -3 + 4i \quad \text{und} \quad z_2 = -2i - (3 - 2i) = -3.$$

(ii) Wir benutzen die Substitution  $u = z^2$ , sodass

$$u^2 + 8u + 7 = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$u^2 + 8u + 4^2 = -7 + 4^2$$

und damit zu

$$(u + 4)^2 = 9.$$

Damit erhalten wir die Lösungen

$$u_1 = 3 - 4 = -1 \quad \text{und} \quad u_2 = -3 - 4 = -7.$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = \sqrt{7}i \quad \text{und} \quad z_4 = -\sqrt{7}i.$$

## Aufgabe 5

((2+2)+1+(3+2)=10 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ ,

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^4 + 5k - 7}{4k^4 + 4k^2 + 9}$ .

(ii) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k}?$$

Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

*Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) aus (i).*

(iii) Bestimmen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$ ,

(b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(6^{-k} (2^k + 9)\right)$ .

---

**Lösung.** (i) (a) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{(k+1)!}{k!} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{k+1}{k+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

für  $k \rightarrow \infty$ .

(b) Die Reihe divergiert, da

$$\frac{3k^4 + 5k - 7}{4k^4 + 4k^2 + 9} = \frac{k^4 \left(3 + \frac{5}{k^3} - \frac{7}{k^4}\right)}{k^4 \left(4 + \frac{4}{k^2} + \frac{9}{k^4}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{k^3} - \frac{7}{k^4}}{4 + \frac{4}{k^2} + \frac{9}{k^4}} \rightarrow \frac{3}{4} \neq 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Damit ist das Triviale Kriterium nicht erfüllt und die Reihe kann nicht konvergieren.

(ii) Da die Reihe in (i) (a) konvergiert, existiert nach dem Triviale Kriterium der Grenzwert und ist gleich 0.

(iii) (a) Sei  $N \in \mathbb{N}^*$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \frac{3}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \frac{k+3-k}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{N+3} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) \\ &= \frac{11}{18} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \rightarrow \frac{11}{18} \end{aligned}$$

für  $N \rightarrow \infty$ .

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} (6^{-k} (2^k + 9)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{3}\right)^k + 9 \left(\frac{1}{6}\right)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{3}{2} + 9 \frac{6}{5} = \frac{123}{10}.\end{aligned}$$

## Aufgabe 6

(6 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (x-2)(x+2), & \text{für } x \in (-\infty, 0], \\ x \ln(x) - 4, & \text{für } x \in (0, 1), \\ e^x, & \text{für } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs auf Stetigkeit.

---

**Lösung.** Außerhalb von 0 und 1 ist  $f$  stetig.

Zur Stetigkeit in 0: Es gilt

$$\lim_{x \uparrow 0} (x-2)(x+2) = -4 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln(x) - 4 = -4,$$

sodass  $f$  in 0 stetig ist.

Zur Stetigkeit in 2: Es gilt

$$\lim_{x \uparrow 1} x \ln(x) - 4 = -4 \neq f(1) = e,$$

sodass  $f$  nicht in 1 stetig ist.

## Aufgabe 7

(6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-(x-1)^2}.$$

Wo ist  $f$  streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

---

**Lösung.** Die Ableitung berechnet sich für  $x \in \mathbb{R}$  zu

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-(x-1)^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-(x-1)^2} (-2)(x-1) = e^{-(x-1)^2} (1 + (-2x+1)(x-1)) \\ &= e^{-(x-1)^2} (1 - 2x^2 + 2x + x - 1) = e^{-(x-1)^2} x (-2x + 3). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $f'$  sind demnach 0 und  $\frac{3}{2}$ . Weiterhin gilt

$$f'(-1) < 0, \quad f'(1) > 0 \quad \text{und} \quad f'(2) < 0.$$

Damit besitzt  $f$  in 0 ein lokales Minimum und in  $\frac{3}{2}$  ein lokales Maximum.

Auf  $(-\infty, 0]$  und  $[\frac{3}{2}, \infty)$  ist  $f$  monoton fallend, auf  $[0, \frac{3}{2}]$  ist  $f$  monoton wachsend.

## Aufgabe 8

(3+5=8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i)  $\int_0^9 x\sqrt{x+9} \, dx,$

(ii)  $\int_0^\pi e^{-x} \sin(x) \, dx.$

---

**Lösung.** (i) Wir benutzen die Substitution  $u(x) = x+9$ , sodass  $u'(x) = 1$  und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^9 x\sqrt{x+9} \, dx &= \int_0^9 (u(x) - 9)\sqrt{u(x)}u'(x)dx = \int_9^{18} (t - 9)\sqrt{t} \, dt \\ &= \int_9^{18} t^{\frac{3}{2}} - 9t^{\frac{1}{2}} \, dt = \left[ \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}} \right]_9^{18} \\ &= \frac{2}{5}18^{\frac{5}{2}} - 6 \cdot 18^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{2}{5}9^{\frac{5}{2}} - 6 \cdot 9^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{5}(3\sqrt{2})^5 - 6 \cdot (3\sqrt{2})^3 - \left( \frac{2}{5}3^5 - 6 \cdot 3^3 \right) \\ &= \frac{2}{5}3^5 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3^3 \left( \frac{18}{5} - 6 \right) \\ &= \frac{3^3}{5} (72\sqrt{2} - 60\sqrt{2} + 12) \\ &= \frac{324}{5} (\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

(ii) Wir benutzen partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-x} \sin(x) \, dx &= [-e^{-x} \sin(x)]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x} \cos(x) \, dx \\ &= [-e^{-x} \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x} \sin(x) \, dx \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x} \sin(x) \, dx, \end{aligned}$$

sodass durch umstellen

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin(x) \, dx = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

gilt.