Aufgabe 1 (8 Punkte).
Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$) des folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 4, \\ ax_1 + 4x_2 + ax_3 &= 1, \\ -2x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+4+1=7 Punkte).

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}.
Hinweis: Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ i & -3 & 1-i \\ 1 & 0 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (3+4=7 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + z(6-4i) + 9 = 12i$,

(ii) $z^4 + 8z^2 + 7 = 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 ((2+2)+1+(3+2)=10 Punkte)**.**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^4+5k-7}{4k^4+4k^2+9}$.

(ii) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k}?$$

Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) aus (i).

(iii) Bestimmen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(6^{-k}\left(2^k+9\right)\right)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.**
Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} (x-2)(x+2), & \text{für } x \in (-\infty, 0], \\ x\ln(x) - 4, & \text{für } x \in (0,1), \\ e^x, & \text{für } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitonsbereichs auf Stetigkeit.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**
Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-(x-1)^2}.$$

Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

Aufgabe 8 (3+5=8 Punkte)**.**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_0^9 x\sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.