Aufgabe 1 (8 Punkte).
Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$) des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_2 + ax_3 &= 1, \\ ax_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+4+1=7 Punkte).

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}.
Hinweis: Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1+2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-2i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (3+4=7 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + z(8+2i) + 8i = -24$,

(ii) $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 ((3+2)+(3+2)=10 Punkte).

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+8}{4k^5+8k^2+2}$.

(ii) Bestimmen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$,

Hinweis: Beachten Sie den Startindex; Indexverschiebung.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(9^{-k}\left(2^k+4^{-k}\right)\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k}$.

Aufgabe 6 (6 Punkte).

Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{e^x-1}, & \text{für } x \in (-\infty, 0), \\ x^3+4x-5, & \text{für } x \in [0,1), \\ \ln(x), & \text{für } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitonsbereichs auf Stetigkeit.

Aufgabe 7 (6 Punkte).

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1-e^{1-x^2}\right)^2.$$

Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

Hinweis: Vorzeichentabelle.

Aufgabe 8 (4+3+1=8 Punkte).

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\ln(3)}}^{\frac{1}{\ln(2)}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\ \mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_0^0 \frac{\sin(x)+2\cos(x)}{\cos(x)+2\sin(x)}\ \mathrm{d}x$.