Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subset \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2t-1 \\ t & -1 & 2t-2 \\ 3 & 3 & 5t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2t-1 & 2 \\ t & -1 & 2t-2 & 0 \\ 3 & 3 & 5t-3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 3I]{II \to II - tI} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2t-1 & 2 \\ 0 & -t-1 & -2t^2+3t-2 & -2t \\ 0 & 0 & -t & 0 \end{array}\right).$$

(i) $t = 0$: $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit der 2. Zeile folgt dann

$$-x_2 - 2x_3 = 0,$$

sodass $x_2 = -2x_3$. Mit der 1. Zeile erhalten wir

$$x_1 + (-2x_3) - x_3 = 2,$$

also $x_1 = 2 + 3x_3$. Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $t \neq 0$: $x_3 = 0$. Mit der 2. Zeile folgt dann

$$-(t+1)x_2 = -2t.$$

(a) $t = -1$: $\mathbb{L}_{-1} = \emptyset$.

(b) $t \neq -1$: $x_2 = 2t/(t+1)$. Mit der 1. Zeile erhalten wir

$$x_1 + \frac{2t}{t+1} = 2,$$

also $x_1 = 2 - 2t/(t+1) = 2/(t+1)$. Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{L}_t = \left\{ \frac{2}{t+1} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Aufgabe 2 **(2+4+1=7 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}.

(*Hinweis : Alle Einträge von* A^{-1} *sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. (i) Es gilt mit der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 1 \\ &= -4 - 3 + 6 + 2 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar.

(ii) Wir benutzen das Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 2III - I]{II \to 2II - 3I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \to II + 3III]{I \to I - III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I \to I + II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Lösung. (i) Wir berechnen zunächst die Determinante von $A - \lambda E_3$ mit der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) =& (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 \\ & - (1-\lambda) \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1-\lambda) - (-2) \cdot (-\lambda) \cdot 2 \\ =& - (1-\lambda)(-\lambda)(1+\lambda) - 4 + 4 + 4\lambda - 4\lambda \\ =& - (1-\lambda)(-\lambda)(1+\lambda). \end{aligned}$$

Damit sind $-1, 0, 1$ die Eigenwerte von A.

(ii) Wir berechnen nun die Eigenvektoren.

(a) $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III - I]{II \to 2II - I} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III + II]{I \to I + 2II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

(b) $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III - 2I]{II \to II - I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to 4III - 6II]{I \to I + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(c) $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III - 2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III \to III - II]{I \to 4I + II} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Aufgabe 4 **(3+2+3=8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen und schreiben Sie sie in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $z^2 + i(2z - 2\sqrt{3}) = 3$,

(ii) $z^4 = 1$,

(iii) $z(z + 2i) = 1 - 2i$.

Lösung. (i) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 + 2iz = 3 + 2\sqrt{3}i.$$

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$z^2 + 2iz + i^2 = (z + i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{1}{3}\pi}.$$

Also gilt

$$z = 2e^{i\frac{1}{6}\pi} - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$$

oder

$$z = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} - i = -\sqrt{3} - i - i = -\sqrt{3} - 2i.$$

(ii) Wir substituieren $w = z^2$ und erhalten

$$w^2 = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, \\ w_2 &= -1 = e^{i\pi} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= -1, \\ z_3 &= e^{i\frac{1}{2}\pi} = i, \\ z_4 &= e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i. \end{aligned}$$

(iii) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 + 2iz = 1 - 2i.$$

Mit einer quadratischen Ergänzung ergibt sich

$$z^2 + 2iz + \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = (z+i)^2 = 1 - 2i + \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -2i = 2e^{i\frac{3}{2}\pi}.$$

Die Lösungen sind damit

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} - i = -1 + i - i = -1, \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} - i = 1 - i - i = 1 - 2i. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 **(3+2+2+2=9 Punkte)**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, Divergenz oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sin(\frac{\pi n^2+3n+2}{n^2+1})$ für alle $n \geq 1$,

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \frac{\cos(\log(n))}{n}$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{217}+1}{k^{207}+k^7}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{3^k}$.

Lösung. (i) (a) Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\pi n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2} \frac{\pi + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi.$$

Da sin stetig ist, folgt daraus

$$\sin(\frac{\pi n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}) \xrightarrow{n\to\infty} \sin(\pi) = 0.$$

(b) Für alle $n \geq 1$ gilt

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(\log(n))}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ folgt aus dem Quetschlemma, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\log(n))}{n} = 0$ gilt.

(ii) (a) Wegen

$$\frac{k^{217} + 1}{k^{207} + k^7} = \frac{k^{217}}{k^{207}} \frac{1 + \frac{1}{k^{217}}}{1 + \frac{1}{k^{200}}} = k^{10} \frac{1 + \frac{1}{k^{217}}}{1 + \frac{1}{k^{200}}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

ist $(\frac{k^{217}+1}{k^{207}+k^7})_{k\geq 1}$ keine Nullfolge, also divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{217}+1}{k^{207}+k^7}$.

(b) Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\frac{(k+1)^2 + k + 1}{3^{k+1}} \frac{3^k}{k^2 + k} = \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + k} \frac{1}{3} = \frac{1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1}{3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} < 1.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{3^k}$ konvergiert.

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+x}{2x^2+1}, & \text{falls } x \in]-\infty, 0], \\ \frac{e^x-1}{2x}, & \text{falls } x \in]0,1], \\ \frac{e-1}{2}\cos(\frac{x^2-1}{x-1}\pi), & \text{falls } x \in]1,\infty[\end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit.

Lösung. In allen Stellen aus $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ ist f als Quotient, Summe, Produkt und Verkettung stetiger Funktionen stetig.

Weiter gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2+x}{2x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

und wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

folgt aus der Regel von L'Hospital, dass $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, also auch

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist f nicht stetig in 0.

(*Hinweis : Die Studenten müssen hier natürlich nicht ganz so genau sein und dürfen sowohl die Regel von L'Hospital direkt für den rechtsseitigen Grenzwert anwenden, als auch einfach*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

schreiben, ohne zuerst die Existenz des zweiten Grenzwerts zu prüfen.)

Weiter gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{e-1}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} \frac{e-1}{2}\cos(\frac{x^2-1}{x-1}\pi) = \lim_{x \searrow 1} \frac{e-1}{2}\cos((x+1)\pi) \\ &= \frac{e-1}{2}\cos(\lim_{x \searrow 1}(x+1)\pi) = \frac{e-1}{2}, \end{aligned}$$

da cos stetig ist. Wegen $f(1) = \frac{e^1-1}{2} = \frac{e-1}{2}$ ist f stetig in 1.

Aufgabe 7 **(4+3=7 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen von $f\colon [1,e] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2(1-\log(x))$. (*Hinweis : Es gilt* $\frac{e}{2} > 1$.)

(ii) Lösen sie das Anfangswertproblem $y'(x) = xy(x)^2$, $y(1) = -2$.

Lösung. (i) Für alle $x \in]1,e[$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(1-\log(x)) + x^2(-\frac{1}{x}) \\ &= 2x - 2x\log(x) - x = x(1-2\log(x)). \end{aligned}$$

Wegen $0 \notin]1,e[$ gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$1 - 2\log(x) = 0$$

gilt, also genau dann, wenn

$$\log(x) = \frac{1}{2}$$

oder $x = e^{\frac{1}{2}}$ gilt. Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, folgt aus $e^0 = 1 < e^{\frac{1}{2}} < e^1$, dass tatsächlich $e^{\frac{1}{2}} \in [1,e]$ gilt.
Weiter sind

$$\begin{aligned} f(e^{\frac{1}{2}}) &= (e^{\frac{1}{2}})^2(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e, \\ f(1) &= 1^2(1-0) = 1, \\ f(e) &= e^2(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis folgt, dass f sein globales Maximum in $e^{\frac{1}{2}}$ und sein globales Minimum in e hat. Damit befindet sich in $e^{\frac{1}{2}}$ auch ein lokales Maximum.
(*Hinweis : In der Vorlesung stand nichts davon, ob wir Randstellen auch lokale Maxima nennen wollen [da der Begriff nur für Funktionen auf offenen Intervallen definiert war]. Wenn jemand trotzdem* 0 *oder* 1 *richtig als lokale Minima identifiziert, ist das natürlich auch ok, verlangen würde ich es zur Lösung der Aufgabe aber entsprechend nicht.*)

(ii) Wir verlangen von den Studenten nur wie sie es in der Vorlesung gesehen haben, dass sie das Anfangswertproblem formal lösen. Sie müssen sich also keine Gedanken über den Definitionsbereich von y machen, oder darüber, ob einzelne Operationen mit y legitim sind (d.h. ob sie auf dem Bild von y definiert sind).
Wir können die DGL formal zu

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

oder

$$\frac{1}{y^2}dy = xdx$$

umschreiben. Eine Integration liefert

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ oder

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - c}.$$

Mit dem Anfangswert folgt

$$-2 = y(1) = \frac{1}{-\frac{1}{2} - c},$$

also $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} - c$ oder $c = 0$.
Damit ist $y : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ die Lösung des Anfangswertproblems. (***Hinweis** : Wie im einleitenden Text angedeutet, würde es hier völlig ausreichen, sowas wie $y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2}$ zu schreiben, also nicht auf den Definitionsbereich zu achten.*)

Aufgabe 8 **(2+3 = 5 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden Integrale:

(i)

$$\int_1^e \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}dx,$$

(ii)

$$\int_1^e 4x^3\log(x)dx.$$

Lösung. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}dx &= \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{x}{x^2}dx\\ &= \int_1^e x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x}dx\\ &= [-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^e+[\log x]_1^e\\ &= -2e^{-\frac{1}{2}}+2+1-0\\ &= -2e^{-\frac{1}{2}}+3.\end{aligned}$$

(ii) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e 4x^3\log(x)dx &= [x^4\log(x)]_1^e-\int_1^e x^4\frac{1}{x}dx\\ &= e^4-0-[\frac{1}{4}x^4]_1^e\\ &= e^4-(\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4})\\ &= \frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$