

**Aufgabe 1****(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_t \subset \mathbb{R}^3$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2t-1 \\ t & -1 & 2t-2 \\ 3 & 3 & 5t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

---

**Aufgabe 2****(2+4+1=7 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass  $A$  invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie  $A^{-1}$ .

(*Hinweis : Alle Einträge von  $A^{-1}$  sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

---

**Aufgabe 3****(8 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $A$ .

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

---

**Aufgabe 4****(3+2+3=8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen und schreiben Sie sie in der Form  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(i)  $z^2 + i(2z - 2\sqrt{3}) = 3$ ,

(ii)  $z^4 = 1$ ,

(iii)  $z(z + 2i) = 1 - 2i$ .

---

**Aufgabe 5****(3+2+2+2=9 Punkte)**

- (i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, Divergenz oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert:

(a)  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = \sin\left(\frac{\pi n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}\right)$  für alle  $n \geq 1$ ,

(b)  $(b_n)_{n \geq 1}$  mit  $b_n = \frac{\cos(\log(n))}{n}$  für alle  $n \geq 1$ .

- (ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{217} + 1}{k^{207} + k^7}$ ,

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k}{3^k}$ .

---

**Aufgabe 6****(8 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 + x}{2x^2 + 1}, & \text{falls } x \in ]-\infty, 0], \\ \frac{e^x - 1}{2x}, & \text{falls } x \in ]0, 1], \\ \frac{e-1}{2} \cos\left(\frac{x^2-1}{x-1}\pi\right), & \text{falls } x \in ]1, \infty[ \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit.

---

**Aufgabe 7****(4+3=7 Punkte)**

- (i) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen von  $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2(1 - \log(x))$ . (*Hinweis* : Es gilt  $\frac{e}{2} > 1$ .)
- (ii) Lösen sie das Anfangswertproblem  $y'(x) = xy(x)^2, y(1) = -2$ .
- 

**Aufgabe 8****(2+3 = 5 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden Integrale:

- (i)

$$\int_1^e \frac{\sqrt{x} + x}{x^2} dx,$$

- (ii)

$$\int_1^e 4x^3 \log(x) dx.$$

---