Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subset \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ t & 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ t & 0 & t^2 & t \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - tI} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3t & t^2 - t & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III + tII} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t^2 - 2t & t \end{array}\right).$$

(i) $t = 0$: $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit der 2. Zeile folgt dann

$$3x_2 - x_3 = 1,$$

sodass $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3$. Mit der 1. Zeile erhalten wir

$$x_1 + 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3\right) + x_3 = 1,$$

also $x_1 = -2x_3$. Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $t = 2$: $\mathbb{L}_2 = \emptyset$, da $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \neq 2$.

(iii) $t \neq 0, t \neq 2$: $x_3 = t/(t(t-2)) = 1/(t-2)$. Mit der 2. Zeile erhalten wir

$$3x_2 - \frac{1}{t-2} = 1,$$

also $x_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{t-2}\right) = \frac{1}{3}\frac{t-1}{t-2}$. Mit der 1. Zeile erhalten wir

$$1x_1 + 3\frac{1}{3}\frac{t-1}{t-2} + \frac{1}{t-2} = 1$$

also $x_1 = 1 - \frac{t}{t-2} = -\frac{2}{t-2}$. Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{L}_t = \left\{ \frac{1}{t-2} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{3}(t-1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Aufgabe 2 **(2+4+1+2=9 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Untersuchen Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit.

(iv) Überprüfen Sie, ob die Matrix B invertierbar ist. (*Hinweis : Betrachten Sie die Zeilen.*)

Lösung. (i) Es gilt mit der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 4 + 0 + 6 - 0 - 8 - 3 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar.

(ii) Wir benutzen das Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 2III - I]{II \to 2II - I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \to II + 3III]{I \to I - 3III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I \to I + 2II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Da die Vektoren die Zeilen der invertierbaren Matrix A sind, sind sie linear unabhängig.

(iv) Die 2. und 3. Zeile sind ein Vielfaches vonaneinander ($2Z_2 = Z_3$), sodass die Zeilen linear abhängig sind.[1] Damit ist die Matrix nicht invertierbar.[1]

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Lösung. (i) Wir berechnen zunächst die Determinante von $A - \lambda E_3$ mit der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_3) =& (3-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda) + (-4)\cdot(-3)\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot(-2) \\
& - (3-\lambda)\cdot(-3)\cdot(-2) - (-4)\cdot 2\cdot(3-\lambda) - 0\cdot(-\lambda)\cdot 0 \\
=& (3-\lambda)(-\lambda(3-\lambda) + 0 + 0 - 6 + 8 - 0) \\
=& (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
=& (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Damit sind $1, 2, 3$ die Eigenwerte von A.

(ii) Wir berechnen nun die Eigenvektoren.

(a) $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - I} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to 3III + 2II]{I \to 3I + 4II} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(b) $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to 3III + II]{I \to 3I + 2II} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(c) $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to 2III - II]{I \to 4I - 3II} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Aufgabe 4 **(3+3=6 Punkte)**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen und schreiben Sie sie in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $z^2 - 2z + 3 = 2\sqrt{3}i$,

(ii) $z^4 = -4$,

Lösung. (i) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 - 2z = -3 + 2\sqrt{3}i.$$

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$z^2 - 2z + (-1)^2 = (z-1)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

Also gilt

$$z = 2e^{i\frac{1}{3}\pi} + 1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 2 + \sqrt{3}i$$

oder

$$z = -2e^{i\frac{1}{3}\pi} + 1 = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = -\sqrt{3}i.$$

(ii) Wir substituieren $w = z^2$ und erhalten

$$w^2 = -4 = 4e^{i\pi}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w_1 &= 2e^{i\frac{1}{2}\pi}, \\ w_2 &= -2e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i, \\ z_2 &= -\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1 - i, \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1 + i, \\ z_4 &= -\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 - i. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 **((3+2)+(2+2)=9 Punkte)**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, Divergenz oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n+3n^2+\pi}{en^2+7}(\frac{n+1}{n})^n$ für alle $n \geq 1$,

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = e^{\sin(\frac{1}{\log(n)})}$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2+k+1}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

Lösung. (i) (a) Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{n+3n^2+\pi}{en^2+7} = \frac{n^2}{n^2}\frac{\frac{1}{n}+3+\frac{\pi}{n^2}}{e+\frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{e}$$

sowie

$$(\frac{n+1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

Aus den Grenzwertsätzen folgt

$$\frac{n+3n^2+\pi}{en^2+7}(\frac{n+1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{e}e = 3.$$

(b) Laut Vorlesung gilt $\log(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, also $\frac{1}{\log(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da sin und exp stetig sind, folgt

$$e^{\sin(\frac{1}{\log(n)})} \xrightarrow{n\to\infty} e^{\sin(0)} = e^0 = 1.$$

(ii) (a) Für alle $k \geq 1$ gilt

$$|\frac{\cos(k)}{k^2+k+1}| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Laut Vorlesung konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, also nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k)}{k^2+k+1}$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$k \leq k+1,$$

also auch

$$3k \leq 3(k+1) \text{ und damit } 3k+1 \leq 3(k+1)+1.$$

Weiter gilt $\frac{1}{3k+1} = \frac{1}{k}\frac{1}{3+\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0\frac{1}{3} = 0$. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$.

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{1-e^x}, & \text{falls } x \in]-\infty, 0[, \\ -1, & \text{falls } x = 0, \\ -\frac{x^3-x}{x^2-x}, & \text{falls } x \in]0,1[, \\ \sin(\frac{3\pi}{2}x), & \text{falls } x \in [1, \infty[\end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit.

Lösung. In allen Stellen aus $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ ist f als Quotient, Summe, Produkt und Verkettung stetiger Funktionen stetig.

Da sin und exp stetig sind, gilt $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0 = \lim_{x\to 0} 1 - e^x$. Aus der Regel von L'Hospital und der Stetigkeit von cos und exp folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Damit ist insbesondere

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin(x)}{1-e^x} = -1.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} -\frac{x^3-x}{x^2-x} = \lim_{x\searrow 0} -\frac{x^2-1}{x-1} = -\frac{-1}{-1} = -1.$$

Zusammen mit $f(0) = -1$ folgt die Stetigkeit von f in 0.

Weiter ist

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} -\frac{x^3-x}{x^2-x} = \lim_{x\nearrow 1} -\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1} -(x+1) = -2$$

und da sin stetig ist, gilt außerdem

$$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} \sin(\frac{3\pi}{2}x) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1.$$

Damit ist f nicht stetig in 1.

Aufgabe 7 **(4+3=7 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^2-2x+1)e^x$.

(ii) Lösen sie das Anfangswertproblem $y'(x) = \frac{x^2}{[y(x)]^2}$, $y(0) = 3$.

Lösung. (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+1)e^x = (x^2-1)e^x.$$

Wegen $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $(x-1)(x+1) = x^2-1 = 0$ oder $x \in \{-1, 1\}$ gilt.
Also sind die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen 1 und -1. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)e^x$$

und damit $f''(1) = 2e > 0$ sowie $f''(-1) = -2\frac{1}{e} < 0$. Damit ist 1 ein lokales Minimum und -1 ein lokales Maximum.

(ii) Wir verlangen von den Studenten nur wie sie es in der Vorlesung gesehen haben, dass sie das Anfangswertproblem formal lösen. Sie müssen sich also keine Gedanken über den Definitionsbereich von y machen, oder darüber, ob einzelne Operationen mit y legitim sind (d.h. ob sie auf dem Bild von y definiert sind).
Wir können die DGL formal zu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

oder

$$y^2dy = x^2dx$$

umschreiben. Eine Integration liefert

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ oder

$$y = \sqrt[3]{x^3+3c}.$$

Mit dem Anfangswert folgt

$$3 = y(0) = \sqrt[3]{0+3c},$$

also $c = \frac{3^3}{3} = 9$.
Damit ist $y : \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x^3+27}$ die Lösung des Anfangswertproblems.
(*Hinweis : Wie im einleitenden Text angedeutet, würde es hier völlig ausreichen, sowas wie* $y(x) = \sqrt[3]{x^3+27}$ *zu schreiben, also nicht auf den Definitionsbereich zu achten.*)

Aufgabe 8 **(2+3 = 5 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden Integrale:

(i)
$$\int_0^1 \frac{x^2-4}{x+2}dx,$$

(ii)
$$\int_{\log(\frac{\pi}{2})}^{\log(\pi)} e^x \cos(e^x)dx.$$

Lösung. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-4}{x+2}dx &= \int_0^1 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx \\ &= \int_0^1 x-2dx \\ &= [\frac{1}{2}x^2-2x]_0^1 = \frac{1}{2}-2-0 = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Mit der Substitution $u : [\log(\frac{\pi}{2}), \log(\pi)] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ folgt

$$\int_{\log(\frac{\pi}{2})}^{\log(\pi)} e^x \cos(e^x)dx = \int_{\log(\frac{\pi}{2})}^{\log(\pi)} u'(x)\cos(u(x))dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0-1 = -1.$$