Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subset \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ t & 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 **(2+4+1+2=9 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Untersuchen Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit.

(iv) Überprüfen Sie, ob die Matrix B invertierbar ist. (*Hinweis : Betrachten Sie die Zeilen.*)

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Aufgabe 4 **(3+3=6 Punkte)**

Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen und schreiben Sie sie in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{(i) } z^2 - 2z + 3 = 2\sqrt{3}i, \qquad \text{(ii) } z^4 = -4.$$

Aufgabe 5 **((3+2)+(2+2)=9 Punkte)**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, Divergenz oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n+3n^2+\pi}{en^2+7}(\frac{n+1}{n})^n$ für alle $n \geq 1$,

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = e^{\sin(\frac{1}{\log(n)})}$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2+k+1}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{1-e^x}, & \text{falls } x \in]-\infty, 0[, \\ -1, & \text{falls } x = 0, \\ -\frac{x^3-x}{x^2-x}, & \text{falls } x \in]0,1[, \\ \sin(\frac{3\pi}{2}x), & \text{falls } x \in [1, \infty[\end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit.

Aufgabe 7 **(4+3=7 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^2-2x+1)e^x$.

(ii) Lösen sie das Anfangswertproblem $y'(x) = \frac{x^2}{[y(x)]^2}$, $y(0) = 3$.

Aufgabe 8 **(2+3 = 5 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i) } \int_0^1 \frac{x^2-4}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii) } \int_{\log(\frac{\pi}{2})}^{\log(\pi)} e^x \cos(e^x)\,\mathrm{d}x.$$
