Aufgabe 1 **(2,5+2,5+(1+1+1)=8 Punkte)**

Es seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$
\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+4}{x^2+1},\\
&f_2\colon\ \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2\} \to \{1,2,\ldots,25\}\,,\ (n,m) \mapsto n^m,\\
&f_3\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x),\\
&f_4\colon \mathbb{R} \to [0;\infty),\ x \mapsto \exp(x).
\end{aligned}
$$

(i) Sei $A = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$.

(ii) Sei $B = \{1, 2, 15, 16\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.

(iii) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Schreiben Sie „Ja“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 zutrifft, und „Nein“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 nicht zutrifft.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2			
f_3			
f_4			

(*Hinweis : Achten Sie genau auf die Definitions- und Zielbereiche der Funktionen!*)

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Schwefeldichlorid reagiert nach folgender Gleichung mit Natriumfluorid zu Schwefeltetrafluorid, Dischwefeldichlorid und Natriumchlorid:

$$3 \cdot SCl_2 + a \cdot NaF \to b \cdot SF_4 + c \cdot S_2Cl_2 + d \cdot NaCl.$$

Die natürlichen Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2t & t \\ -1 & 1-t & 1 \\ 0 & 6 & t^2+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **(2+4+2=8 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ay = c$.

Aufgabe 5 **(1+3+4=8 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 = -2i$,

(ii) $z^2 + 2z + 9 = 8\sqrt{3}i$, (*Hinweis* : $16^2 = 256$)

(iii) $z^4 = 2iz^2 - 8$.

Geben Sie hierbei die Lösungen in der Form $a + bi$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(\cos(x) + \ln(x+1)\right),$$
$$g\colon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x).$$

(i) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $a = 0$.

(ii) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von g in $a = 0$.

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \exp(x_1^2) - x_2 + \frac{1}{3}x_2^3,$$

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 \exp(x_2) + x_1 \sin(x_3 + \pi) + x_1.$$

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \ln(2) \\ \pi \end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	-1	0	1	2
y	0	-1	1	2

Als Modellfunktion betrachen wir

$$f_{x_1,x_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x_1 \cdot t + x_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

mit Parametern $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Führen Sie eine lineare Ausgleichsrechnung durch um die optimalen Parameter $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}$ zu finden.
