Aufgabe 1 **(2,5+2,5+(1+1+1)=8 Punkte)**

Es seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+4}{x^2+1},$$
$$f_2\colon\ \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2\} \to \{1,2,\dots,25\}\,,\ (n,m) \mapsto n^m,$$
$$f_3\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x),$$
$$f_4\colon \mathbb{R} \to [0;\infty),\ x \mapsto \exp(x).$$

(i) Sei $A = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$.

(ii) Sei $B = \{1, 2, 15, 16\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.

(iii) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Schreiben Sie „Ja", falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 zutrifft, und „Nein", falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 nicht zutrifft.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2			
f_3			
f_4			

(*Hinweis : Achten Sie genau auf die Definitions- und Zielbereiche der Funktionen!*)

Lösung. (i) Es gilt[4 · 0,5P]

$$f_1(-2) = \frac{2}{5},\ f_1(0) = 4,\ f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18}{5} \text{ und } f_1(1) = \frac{5}{2},$$

sodass[0,5P]

$$f_1(A) = \left\{\frac{2}{5}, 4, \frac{18}{5}, \frac{5}{2}\right\}.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(ii) Es gilt

$n\backslash m$	1	2
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	4	16
5	5	25

sodass [$4 \cdot 0{,}5$P]

$f_2^{-1}(\{1\}) = \{(1,1),(1,2)\}\,,\ f_2^{-1}(\{2\}) = \{(2,1)\}\,,\ f_2^{-1}(\{15\}) = \emptyset,\ f_2^{-1}(\{16\}) = \{(4,2)\}\,,$

sodass[0,5P]

$$f_2^{-1}(B) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(4,2)\}\,.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(iii) Es gilt:[$3 \cdot 1$P]

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2	Nein	Nein	Nein
f_3	Ja	Ja	Ja
f_4	Ja	Nein	Nein

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Schwefeldichlorid reagiert nach folgender Gleichung mit Natriumfluorid zu Schwefeltetrafluorid, Dischwefeldichlorid und Natriumchlorid:

$$3 \cdot SCl_2 + a \cdot NaF \to b \cdot SF_4 + c \cdot S_2Cl_2 + d \cdot NaCl.$$

Die natürlichen Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

Lösung 0.1. Das LGS lautet[2P]

$$\begin{array}{rcl} 3 &=& b+2c \\ 3\cdot 2 &=& 2c+d \\ a &=& d \\ a &=& 4b \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} b+2c &=& 3 \\ 2c+d &=& 6 \\ a-d &=& 0 \\ a-4b &=& 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei die erste Zeile S, die zweite Zeile Cl, die dritte Zeile Na und die vierte Zeile F entspricht. Der Gaußalgorithmus liefert [2P]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{IV \to IV - I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{IV \to IV + 4II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV \to IV - 4III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right).$$

Also gilt nach der 4. Zeile

$$-3d = -12 \Leftrightarrow d = 4$$

und mit der 3. Zeile folgt

$$6 = 2c + d = 2c + 4 \Leftrightarrow 2c = 2 \Leftrightarrow c = 1.$$

Die 2. Zeile liefert

$$3 = b + 2c = b + 2 \Leftrightarrow b = 1$$

und die 1. Zeile liefert schließlich

$$0 = a - d = a - 4 \Leftrightarrow a = 4.$$

Also[2P]

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$3 \cdot SCl_2 + 4 \cdot NaF \to SF_4 + S_2Cl_2 + 4 \cdot NaCl.$$

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2t & t \\ -1 & 1-t & 1 \\ 0 & 6 & t^2+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:[2P]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2t & t & 2 \\ -1 & 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 6 & t^2+6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to 2II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2t & t & 2 \\ 0 & 2 & 2+t & 4 \\ 0 & 6 & t^2+6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III-3II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2t & t & 2 \\ 0 & 2 & 2+t & 4 \\ 0 & 0 & t^2-3t & 0 \end{array}\right).$$

Da $t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ oder $t = 3$, machen wir eine Fallunterscheidung:[1P]

(i) $t = 0$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die zweite Zeile liefert

$$4 = 2x_2 + 2x_3 \Leftrightarrow x_2 = 2 - x_3$$

und die erste Zeile lautet

$$2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Wir erhalten also[1,5P]

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $t = 3$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die zweite Zeile liefert

$$4 = 2x_2 + 5x_3 \Leftrightarrow x_2 = 2 - \frac{5}{2}x_3$$

und die erste Zeile lautet

$$2 = 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2x_1 + 12 - 15x_3 + 3x_3 = 2x_1 + 12 - 12x_3 \Leftrightarrow x_1 = -5 + 6x_3.$$

Wir erhalten also[1,5P]

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -5+6x_3 \\ 2-\frac{5}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) $t \neq 0$ und $t \neq 3$: Die dritte Zeile liefert

$$x_3 = 0,$$

sodass mit der zweiten Zeile

$$4 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

folgt. Die erste Zeile liefert

$$2 = 2x_1 + 2tx_2 = 2x_1 + 4t \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2t,$$

also[2P]

$$\mathbb{L}_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4 **(2+4+2=8 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ay = c$.

Lösung. (i) Wir entwickeln nach der dritten Spalte und erhalten[1,5P]

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right) - 0 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right) + 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (-1) \cdot 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Also ist A invertierbar.[0,5P]

(ii) Wir benutzen den Gaußalgorithmus:[4P]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III+6I]{II \to II+I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III-6II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to II+III]{I \to I+III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I \to I-2II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to -II]{I \to -I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Nach der Vorlesung gilt[$2 \cdot 1$P]

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = A^{-1}c = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **(1+3+4=8 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 = -2i$,

(ii) $z^2 + 2z + 9 = 8\sqrt{3}i$, ($Hinweis$: $16^2 = 256$)

(iii) $z^4 = 2iz^2 - 8$.

Geben Sie hierbei die Lösungen in der Form $a + bi$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung. (i) Es gilt

$$z^2 = -2i = 2e^{i\frac{3}{2}\pi},$$

sodass[1P]

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i,$$
$$z_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = 1 - i.$$

(ii) Wir gehen wie in Vorlesung 8, Folien 19 & 20 vor. Hierzu schreiben wir die Gleichung zunächst wie folgt um:

$$z^2 + 2z + 9 - 8\sqrt{3}i = 0.$$

Also gilt $a = 1,\ b = 2,\ c = 9 - 8\sqrt{3}i$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -9 + 8\sqrt{3}i + 1 = -8 + 8\sqrt{3}i \neq 0.$$

Wir schreiben nun Δ in Polarkoordinaten. Es gilt

$$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{256} = 16$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

sodass $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ folgt (vgl. Tabelle). Wir erhalten also[1]

$$\Delta = 16e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

sodass[$2 \cdot$ 1P]

$$z_1 = \sqrt{16}e^{i\frac{1}{2}\frac{2}{3}\pi} - 1 = 4e^{i\frac{1}{3}\pi} - 1 = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 1 + 2\sqrt{3}i,$$
$$z_2 = -\sqrt{16}e^{i\frac{1}{2}\frac{2}{3}\pi} - 1 = -4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -3 - 2\sqrt{3}i.$$

(iii) Wir gehen wie in Vorlesung 8, Folien 19 & 20 vor und benutzen die Substitution $w = z^2$. Hierzu schreiben wir die Gleichung wie folgt um:

$$z^4 - 2iz^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 2iw + 8 = 0.$$

Also gilt $a = 1,\ b = -2i,\ c = 8$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -8 - 1 = -9 \neq 0.$$

Wir schreiben Δ in Polarkoordinaten (man kann dies direkt tun, da $-1 = e^{i\pi}$). Es gilt

$$|\Delta| = \sqrt{(-9)^2 + (0)^2} = 9$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \frac{-9}{9} = -1 \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{0}{9} = 0,$$

sodass $\varphi = \pi$ folgt (vgl. Tabelle). Wir erhalten also

$$\Delta = 9e^{i\pi},$$

sodass[$2 \cdot 1$P]

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{9}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{-2i}{2 \cdot 1} = 3(0 + i) + i = 4i = 4e^{i\frac{1}{2}\pi}, \\ w_2 &= -\sqrt{9}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{-2i}{2 \cdot 1} = -3i + i = -2i = 2e^{i\frac{3}{2}\pi}. \end{aligned}$$

(Um $4i$ und $-2i$ in Polarkoordinaten zu schreiben müssten wir die Rechnungen wie oben durchführen. Da $i = e^{i\frac{1}{2}\pi}$ und $-i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ gelten, kann man dies aber auch direkt hinschreiben.) Rücksubstitution liefert schließlich[$4 \cdot 0,5$P]

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{1}{4}\pi} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ z_2 &= -2e^{i\frac{1}{4}\pi} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i, \\ z_4 &= -\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = 1 - i. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(\cos(x) + \ln(x+1)\right),$$
$$g\colon \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x).$$

(i) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $a = 0$.

(ii) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von g in $a = 0$.

Lösung. (i) Es gilt[1 + 2P]

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \exp(\cos(x) + \ln(x+1))\left(-\sin(x) + \frac{1}{x+1}\right),\\
f''(x) &= \exp(\cos(x) + \ln(x+1))\left(-\sin(x) + \frac{1}{x+1}\right)^2\\
&\quad + \exp(\cos(x) + \ln(x+1))\left(-\cos(x) - \frac{1}{(x+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1;\infty)$. Damit folgt[1P]

$$\begin{aligned}
T_{f,0,2}(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2\\
&= e + e\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(-e)x^2\\
&= e + e\cdot x - \frac{e}{2}\cdot x^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. (*Hinweis : Es gilt*

$$\exp(\cos(x) + \ln(x+1)) = \exp(\cos(x))(x+1)$$

für alle $x \in (-1;\infty)$. Dies erleichtert das Ableiten erheblich.)

(ii) Es gilt[3 · 1P]

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2},\\
g''(x) &= -2\cos(x)^{-3}(-\sin(x)) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\\
g'''(x) &= 2\left(\frac{\cos(x)\cos(x)^3 - \sin(x)3\cos(x)^2(-\sin(x))}{\cos(x)^6}\right)\\
&= 2\frac{\cos(x)^2 + 3\sin(x)^2}{\cos(x)^4} = 2\frac{1 + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^4}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Damit folgt[1]

$$\begin{aligned} T_{g,0,3}(x) &= g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{1}{2}g''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{6}g'''(0)(x-0)^3 \\ &= 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \exp(x_1^2) - x_2 + \frac{1}{3}x_2^3,$$
$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 \exp(x_2) + x_1 \sin(x_3 + \pi) + x_1.$$

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \ln(2) \\ \pi \end{pmatrix}\right)$.

Lösung. (i) Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$g_{1,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x^2) - a_2 + \frac{1}{3}a_2^3,$$
$$g_{2,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(a_1^2) - x + \frac{1}{3}x^3,$$

sodass

$$g'_{1,a}(x) = 2x\exp(x^2)$$
$$g'_{2,a}(x) = -1 + x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also[2P]

$$\operatorname{grad}(f)(a) = \begin{pmatrix} 2a_1 \exp(a_1^2) \\ a_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Damit a ein kritischer Punkt ist müssen

$$2a_1 \exp(a_1^2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0,$$
$$a_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 1 \text{ oder } a_2 = -1$$

gelten, sodass[2P]

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die kritischen Punkt von f sind.

(ii) Sei $a = \begin{pmatrix} 2 \\ \ln(2) \\ \pi \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{a,1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2 + x \\
\tilde{g}_{a,1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4\exp(x) + 2 \\
\tilde{g}_{a,1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 10 + 2\sin(x + \pi)
\end{aligned}$$

sodass[3P]

$$\begin{aligned}
\tilde{g}'_{a,1}(x) &= 4x + 1, \\
\tilde{g}'_{a,2}(x) &= 4\exp(x), \\
\tilde{g}'_{a,3}(x) &= 2\cos(x + \pi)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir[1P]

$$\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \ln(2) \\ \pi \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	-1	0	1	2
y	0	-1	1	2

Als Modellfunktion betrachen wir

$$f_{x_1,x_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x_1 \cdot t + x_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

mit Parametern $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Führen Sie eine lineare Ausgleichsrechnung durch um die optimalen Parameter $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}$ zu finden.

Lösung. Die Messdaten liefern

$$\begin{aligned} f_{x_1,x_2}(-1) &= -x_1, \\ f_{x_1,x_2}(0) &= x_2, \\ f_{x_1,x_2}(1) &= x_1, \\ f_{x_1,x_2}(2) &= 2x_1 - x_2, \end{aligned}$$

sodass[1P]

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Also[$2 \cdot 1$P]

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

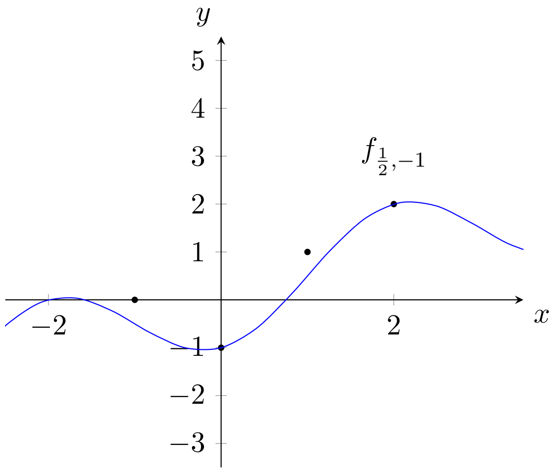
$$A^T y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt[3P]

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T y = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Funktion ist damit

$$f_{\frac{1}{2},-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{2} t - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right).$$


y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-2
2
x
$f_{\frac{1}{2},-1}$