Aufgabe 1 **(2,5+2,5+(1+1+1)=8 Punkte)**

Es seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$
\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3+4}{x+1},\\
&f_2\colon\ \{-2,0,2\}\times\{-1,0,1\} \to \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\,,\ (n,m)\mapsto n-m,\\
&f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin(x),\\
&f_4\colon [0;2\pi]\to[-1;1],\ x\mapsto\cos(x).
\end{aligned}
$$

(i) Sei $A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$. Geben Sie hierbei alle vorkommenden Zahlen als vollständig gekürzte Brüche an.

(ii) Sei $B = \{-2, 0, 1, 3\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.

(iii) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Schreiben Sie „Ja“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 zutrifft, und „Nein“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 nicht zutrifft.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2			
f_3			
f_4			

(*Hinweis : Achten Sie genau auf die Definitions- und Zielbereiche der Funktionen!*)

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Natriumhydroxid reagiert nach folgender Gleichung mit Brom zu Natriumbromid, Natriumbromat und Wasser:

$$a \cdot NaOH + 3 \cdot Br_2 \to b \cdot NaBr + c \cdot NaBrO_3 + d \cdot H_2O.$$

Die natürlichen Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2t & 2t+3 \\ 2 & 2t+2 & 3t+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **(2+4+2=8 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ay = c$.

Aufgabe 5 **(2+2+4=8 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(i) $2z^2 + 1 = i\sqrt{3}$,

(ii) $z^2 + 4(1 + 2i - z) = 0$,

(iii) $z^4 - 16 = 10iz^2$.

Geben Sie hierbei die Lösungen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \left(-\frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\cos(x) + \sin(x)),$$
$$g\colon (0;\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}.$$

(i) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $a = 0$.

(ii) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von g in $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sin(x_1) - x_2^2,$$
$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \ln(x_2^2 + 1) + \exp(1 - x_3).$$

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{e-1}} \\ \sqrt{e-1} \\ 1-\ln(2) \end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	0	-1	$\frac{3}{2}$	2

Bestimmen Sie ein Polynom 3. Grades, das die Messdaten interpoliert.

(*Hinweis : Die Koeffizienten des Polynoms sind ganzzahlig.*)
